BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 282

Conceptions : HEC Paris – ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Jeudi 5 mai 2022, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Ce problème étudie quelques propriétés des endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel E de dimension finie, ainsi que la décomposition de Frobenius d'un endomorphisme de E.

Dans tout le problème :

- $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- n est un entier supérieur ou égal à 2 ;
- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ;
- $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E ;
- on rappelle qu'une **homothétie** est une application du type $\lambda \mathrm{id}_E$ où λ appartient à $\mathbb{K}$ et id_E est l'application identique (ou identité) de E ;
- un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable** par un endomorphisme u de E si, pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

  On note alors $u_{|F}$, l'endomorphisme de F définit par : $u_{|F} : \begin{cases} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$.

  Cet endomorphisme est appelé endomorphisme de F **induit** par u ;
- si u est un endomorphisme de E, on définit les puissances successives de u par récurrence : $u^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $u^k = u \circ u^{k-1}$;
- si u est un endomorphisme de E et e un vecteur de E, on note $E_u(e)$ le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_u(e) = \mathrm{vect}\big(u^k(e) \mid k \in [\![0, n-1]\!]\big) = \mathrm{vect}\big(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e)\big)$$

Si k est un entier naturel non nul, $\mathscr{B}(e,k)$ désigne la famille $\left(e,u(e),u^2(e),\ldots,u^{k-1}(e)\right)$

- soit $u \in \mathscr{L}(E)$; on dit que u est un **endomorphisme cyclique** s'il existe $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$; on considérera qu'en dimension 1, tout endomorphisme est cyclique ;
- soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; on dit que A est une **matrice de Frobenius** ou une **matrice compagnon** s'il existe des scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

  Le polynôme $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$ est appelé **polynôme caractéristique** de A ;
- on dit qu'un endomorphisme u de E est **nilpotent** s'il existe un entier naturel non nul k tel que $u^k = 0$. Dans ce cas, $r = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0\}$ est appelé **indice de nilpotence** de u.

Le problème comporte trois parties.
Dans la première partie, on étudie les premières propriétés des endomorphismes cycliques, on traite quelques exemples, en particulier avec Scilab.
Dans la seconde partie, on étudie le cas des endomorphismes diagonalisables et nilpotents.
Dans la troisième partie, on obtient une décomposition d'un endomorphisme appelée **décomposition de Frobenius** et on en déduit quelques propriétés élémentaires ; on montre en particulier que toute matrice carrée réelle est semblable à sa transposée.

Partie I - Premières propriétés

Soit u un endomorphisme de E et e un vecteur *non nul* de E.

Section A - Étude des sous-espaces $E_u(e)$

1. Justifier que la famille $\mathscr{B}(e,n+1)$ est liée.
2. On note $d(e) = \max\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathscr{B}(e,k) \text{ est libre}\}$; justifier l'existence de $d(e)$.
3. Montrer qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{d(e)-1}$ tels que :

$$u^{d(e)}(e) = a_0 e + a_1 u(e) + a_2 u^2(e) + \cdots + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$$

   Montrer alors que pour tout entier k supérieur ou égal à $d(e)$, le vecteur $u^k(e)$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\left(e,u(e),u^2(e),\ldots,u^{d(e)-1}(e)\right)$.
   En déduire que $\mathscr{B}\left(e,d(e)\right)$ est une base de $E_u(e)$.

4. Montrer que $E_u(e)$ est stable par l'endomorphisme u.

   Montrer également que tout sous-espace vectoriel F de E contenant e et stable par l'endomorphisme u contient $E_u(e)$.
5. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur l'entier $d(e)$, le vecteur e est-il un vecteur propre pour u ?
6. Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout vecteur *non nul* e de E, on a $d(e) = 1$.
7. Montrer que u est un endomorphisme cyclique si et seulement s'il existe un vecteur *non nul* e de E tel que $d(e) = n$.

Section B - Premières propriétés des endomorphismes cycliques

On suppose dans cette section que u est un endomorphisme cyclique de E et donc qu'il existe un vecteur non nul e de E tel que $E = E_u(e)$.

8. On note A la matrice de u dans la base $\mathscr{B}(e,n)$ de E ; vérifier que A est une matrice de Frobenius.
9. On note $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0$ son polynôme caractéristique.

   Que vaut $\big(P_A(u)\big)(e)$?

   Calculer $\big(P_A(u)\big)\big(u^k(e)\big)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

   Montrer que P_A est un polynôme annulateur de u.
10. Vérifier que la famille $(\mathrm{id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n-1})$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$.
11. En déduire que P_A est un polynôme annulateur non nul de u de degré minimal.
12. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que λ est valeur propre de u si et seulement si λ est racine de P_A et vérifier que le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est de dimension 1.
13. En déduire une caractérisation portant sur P_A pour que u soit diagonalisable.

Section C - Un premier exemple

On suppose dans cette section que $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathscr{B}_3$ la base canonique de E.
On note aussi f et g les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathscr{B}_3$ sont respectivement

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Justifier que f est diagonalisable. On notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ les valeurs propres de f rangées par ordre croissant.
15. Déterminer (V_1, V_2, V_3) une base de diagonalisation de f telle que pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $f(V_i) = \lambda_i V_i$ et telle que la première coordonnée du vecteur V_i dans la base $\mathscr{B}_3$ soit 1.
16. On pose $V = V_1 + V_2 + V_3$; déterminer $d(V)$ et en déduire que f est cyclique.
17. Déterminer un polynôme annulateur non nul de g de degré minimal.

    L'endomorphisme g est-il cyclique ?
18. Vérifier que (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de g.

Section D - Avec Scilab

Dans cette section, on suppose que les polynômes sont à coefficients réels. On va étudier deux méthodes indépendantes qui vont implémenter en Scilab la caractérisation vue dans la question 13.
Les questions 22 et suivantes de cette section sont indépendantes des précédentes questions.
On pourra utiliser les quelques notions de Scilab données ci-dessous :

- on crée un polynôme `p` de la variable `x` à l'aide de la syntaxe
  `p = poly(coeff, 'x', 'c')` où `coeff` est le vecteur représentant les coefficients de `p`. Par exemple, le polynôme $p : x \mapsto 2 - 3x + x^3$ est défini par
  `p = poly([2, -3, 0, 1], 'x', 'c');`
- pour évaluer un polynôme `p` en une valeur `val`, on utilise `horner(p, val)`;
- le degré d'un polynôme `p` est obtenu sous Scilab par `degree(p)`;
- la dérivée d'un polynôme `p` est obtenue sous Scilab par `derivat(p)` qui renvoie un polynôme ;
- on peut effectuer des tests de comparaison avec ==, <=, >=, <, > ou <>.
  Par exemple, si `x` est une variable de type numérique, l'instruction `x>=0` renvoie le booléen `T` (ou `vrai`) si `x` est positif ou nul et le booléen `F` (ou `faux`) si `x` est strictement négatif ;
- les fonctions `max`, `sum`, `abs` permettent de calculer respectivement le maximum, la somme et la valeur absolue des éléments d'un vecteur (on renvoie un vecteur pour la fonction `abs`).

19. Soient P et Q deux polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un polynôme Δ, diviseur commun à P et Q, de degré maximum et dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1. Un tel polynôme Δ est appelé un **pgcd** de P et Q.
    Dans la suite, on pourra utiliser la fonction Scilab `bezout` qui appliquée à deux polynômes `p` et `q`, renvoie un pgcd de `p` et `q` sous forme d'un polynôme.
20. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que P admet une racine *complexe* de multiplicité strictement supérieure à 1 si et seulement si un pgcd de P et de sa dérivée P' est de degré supérieur ou égal à 1.
21. Compléter la fonction Scilab `racSimp` suivante qui appliquée au vecteur ligne `c` représentant les coefficients d'un polynôme P renvoie le booléen `T` ou `F` selon que le polynôme P n'a que des racines simples ou pas.

```
function b = racSimp(c)
    ...
    ...
    b = ...
endfunction
```

    Comment utiliser cette fonction pour tester si une matrice de Frobenius est diagonalisable ou non ?

Dans la suite de cette section, on propose une deuxième méthode approximative, valable seulement dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et permettant de tester si un polynôme *réel* de degré n admet exactement n racines réelles distinctes.
L'idée de la méthode est de partir d'un réel en deçà duquel on est sûr que le polynôme ne s'annule pas. Par un parcours de gauche à droite, on va tester le signe du polynôme et si l'on rencontre n changement de signes, on saura que le polynôme admet n racines réelles. Dans le cas contraire, on renverra une valeur d'indétermination.

22. Justifier que si un polynôme P de degré n est tel qu'il existe $n+1$ réels $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ tels que $P(x_k)P(x_{k+1}) < 0$ pour $k \in [\![1,n]\!]$, alors P admet n racines distinctes.

23. Montrer que si $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients réels et si z est un réel tel que $P(z) = 0$, alors $|z| \leq \max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$ (on pourra montrer que si $|z| > 1$, alors $|z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$).

    Dans la suite, on notera m le réel $\max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$.

24. Compléter la fonction Scilab `racSimpApprox` suivante qui appliquée au vecteur ligne `c` représentant les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ du polynôme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et au réel `pas`, renvoie le booléen `T` si cette fonction Scilab détecte n changements de signe en partant de `m-pas/2` et en testant les valeurs de `pas` en `pas` jusqu'à dépasser `m+pas/2`.
    Dans le cas où l'on ne rencontre pas n changements de signe, la fonction renverra la chaîne de caractères `"ind"`.

```
function val = racSimpApprox(c,pas)
    ...
     .
     .
     .
    ...
    val = ...
endfunction
```

25. Comment utiliser cette fonction pour tester si une matrice de Frobenius est diagonalisable ou non ?
    Expliquer dans quel(s) cas la fonction renvoie la valeur indéterminée `"ind"`.

Partie II - Étude de deux cas particuliers

Section A - Endomorphismes diagonalisables qui sont cycliques

Dans cette section, on considère un endomorphisme u de E et on suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ une liste des valeurs propres distinctes de u.

26. En considérant son action sur une base de vecteurs propres de u, établir que l'endomorphisme $(u - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ (u - \lambda_2 \mathrm{id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p \mathrm{id}_E)$ est l'endomorphisme nul.

27. En déduire que la famille $(\mathrm{id}_E, u, u^2, \dots, u^p)$ est liée dans $\mathscr{L}(E)$.

28. Quelle est la valeur de p si u est cyclique ?

    On suppose jusqu'à la fin de cette section que $p = n$, et on note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

29. Soit $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Montrer que la famille $\mathscr{B}(e,n)$ est libre et conclure que u est cyclique.

30. On reprend dans cette question seulement l'exemple de la section C de la partie I et, pour α réel, on note $u_\alpha = g + \alpha f$.

    Montrer que u_α est diagonalisable et discuter, suivant les valeurs de α, les cas où u_α est cyclique.

Section B - Endomorphismes nilpotents qui sont cycliques

Dans cette section, u est un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence r.

31. Soit $e \in E$ tel que $u^{r-1}(e) \neq 0_E$; montrer que la famille $\big(e, u(e), \dots, u^{r-1}(e)\big)$ est libre dans E.
32. En déduire que $r \leq n$ et montrer que $r = n$ si et seulement si u est cyclique.

    Dans le cas $r = n$, écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}(e,n)$.

Section C - Un second exemple

Dans cette section, E est le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$.
Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note X^k la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^k$ de E et on rappelle que $(X^k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ constitue une base de E.

33. Soit $P \in E$; montrer que pour tout x réel, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge et montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ appartient à E.

On note $u : P \in E \mapsto u(P)$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(P)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

34. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
35. Soit $P \in E$; à l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u(P)(x) = P(x) + u(P')(x)$$

    où P' désigne la dérivée de P.

36. En déduire que pour tout $P \in E$, $u(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}$ où, pour $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P.
37. Soit $P \in E$; à l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u(P)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(s)\,\mathrm{e}^{-s}\,ds$$

38. Montrer que pour tout $P \in E$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} P(s)\,\mathrm{e}^{-s}\,ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

    Montrer alors que $u(P)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\big(u(P)\big)' = u(P) - P$.

    En déduire que $\big(u(P)\big)' = u(P')$.

39. Déterminer la matrice de u dans la base $(X^k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ de E et en déduire le spectre de u.
40. On pose $v = u - \mathrm{id}_E$; montrer que $\mathrm{Im}(v)$ est le sous-espace vectoriel de E, constitué des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $n-2$.
41. Montrer que v est nilpotent. L'endomorphisme v est-il cyclique ?

Partie III - Décomposition de Frobenius et applications

On se propose de démontrer, pour tout endomorphisme u de $\mathscr{L}(E)$, la propriété suivante notée $(\mathscr{R})$:

$(\mathscr{R})$

> il existe $p \in [\![1,n]\!]$ et $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels non nuls de E, stables par u, tels que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ et vérifiant :
>
> pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $u_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique de F_i.

Section A - Cas d'une homothétie

42. Démontrer que la propriété $(\mathscr{R})$ est réalisée si u est une homothétie.

Section B - Cas où u n'est pas une homothétie

43. Justifier qu'il existe e vecteur *non nul* de E tel que $d(e) \neq 1$.

Pour le reste de cette section, on choisit un vecteur *non nul* e de E tel que $d = d(e)$ soit maximal (donc $d \geq 2$) et on note, pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$, $e_k = u^k(e)$;
on note toujours $\mathscr{B}(e,d) = (e_0, e_1, \ldots, e_{d-1})$ ainsi que $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ les scalaires tels que
$u^d(e) = \sum\limits_{k=0}^{d-1} a_k u^k(e)$. Enfin, on note $F_1 = E_u(e)$.

44. Justifier que la propriété $(\mathscr{R})$ est réalisée si $d = n$.

Dans la suite de cette section, on suppose que $d \in [\![2, n-1]\!]$ (et donc $n \geq 3$).
On complète la famille $\mathscr{B}(e,d)$ en une base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_{d-1}, e_d, \ldots, e_{n-1})$ de E.

45. Démontrer que l'application $\varphi : x = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k e_k \in E \mapsto x_{d-1}$ est une forme linéaire non nulle de E.

On considère l'application $\Phi : x \in E \mapsto \Big(\varphi\big(u^{d-1}(x)\big), \varphi\big(u^{d-2}(x)\big), \ldots, \varphi\big(u(x)\big), \varphi(x)\Big) \in \mathbb{K}^d$.

46. Vérifier que Φ est linéaire. On note $G = \operatorname{Ker}(\Phi)$ et $\widetilde{\Phi}$ la restriction de Φ à F_1.
47. Calculer $\Phi(e_0) = \Phi(e)$ et $\Phi(e_1) = \Phi\big(u(e)\big)$.
    Plus généralement, justifier que pour tout $k \in [\![1, d-1]\!]$, il existe une famille de scalaires $(\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \ldots, \beta_{k-1,k}) \in \mathbb{K}^k$ telle que $\Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \ldots, \beta_{k-1,k}, 1, 0, \ldots, 0)$.
48. Écrire alors la matrice de l'application $\widetilde{\Phi}$ dans les bases $\mathscr{B}(e,d)$ de F_1 et la base canonique de $\mathbb{K}^d$ et justifier que $\widetilde{\Phi}$ est bijectif.
49. Montrer alors que $E = F_1 \oplus G$ et justifier que G est stable par u.
50. Dire pourquoi $u_{|F_1}$ est bien un endomorphisme cyclique de F_1.
51. Justifier que pour tout vecteur *non nul* e' de G, $d(e') \leq d$.
52. Démontrer que la propriété $(\mathscr{R})$ est réalisée.

Section C - Première application : décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents

53. Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $p \in [\![1,n]\!]$ et $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E non nuls et stables par u, tels que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$.
Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on note $\mathscr{B}_{F_k}$ une base de F_k.
Soit $\mathscr{B}$ la concaténation des bases $\mathscr{B}_{F_1}, \mathscr{B}_{F_2}, \dots, \mathscr{B}_{F_p}$. On rappelle que $\mathscr{B}$ est une base de E.
Quelle est la forme de la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$?

Dans la suite de cette section, u est un endomorphisme nilpotent de E d'indice p.

54. Montrer, à l'aide de la propriété $(\mathscr{R})$, qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice $T = (t_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de u est triangulaire inférieure et telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $t_{i,i} = 0$, pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, $t_{i,i-1} \in \{0,1\}$, et tous les autres coefficients de T sont nuls.

Section D - Deuxième application : toute matrice carrée est semblable à sa transposée

Dans cette section, $E = \mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}_n$ est M.
On se propose de montrer que M vérifie la propriété $(\mathscr{S})$:

$(\mathscr{S})$	il existe deux matrices symétriques V et W de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec W inversible telles que $M = VW$

55. *Cas où u est cyclique :* il existe donc $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$; on note toujours $\mathscr{B}(e,n)$ la base $\big(e, u(e), u^2(e), \dots, u^{n-1}(e)\big)$ de E et $A = M_{\mathscr{B}(e,n)}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathscr{B}(e,n)$: il s'agit de la matrice de Frobenius associée aux scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On considère :

$$S = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ -a_2 & -a_3 & \cdots & \iddots & -a_{n-1} & 1 & 0 \\ -a_3 & \cdots & \iddots & \iddots & \iddots & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & \iddots & \iddots & (0) & & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de E tel que S est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}(e,n)$. On a donc :

$$f(e) = -\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}(e)\right) + u^{n-1}(e) \qquad f\big(u(e)\big) = -\left(\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-2}(e)\right) + u^{n-2}(e)$$

et plus généralement :

$$\forall j \in [\![0, n-2]\!] \qquad f\big(u^j(e)\big) = -\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j-1}(e)\right) + u^{n-j-1}(e)$$

et enfin $f\big(u^{n-1}(e)\big) = e$.

Calculer $u\big(f(e)\big)$, $u\Big(f\big(u(e)\big)\Big)$ et plus généralement, pour tout $j \in [\![0, n-2]\!]$, $u\Big(f\big(u^j(e)\big)\Big)$ et enfin $u\Big(f\big(u^{n-1}(e)\big)\Big)$.

56. En déduire que $AS = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & -a_3 & -a_4 & \iddots & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & -a_{n-2} & \iddots & \iddots & \iddots & (0) & \\ 0 & -a_{n-1} & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On notera S_1 cette matrice AS.

57. Justifier que S est inversible; on note $S_2 = S^{-1}$ et on a donc $A = S_1 S_2$ où S_1 et S_2 sont deux matrices symétriques réelles.

58. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_n$ vers la base $\mathscr{B}(e,n)$;
vérifier que $M = PS_1({}^tP)({}^tP)^{-1}S_2P^{-1}$ et conclure que M vérifie la propriété $(\mathscr{S})$.

59. Montrer alors que ${}^tM$ et M sont semblables; plus précisément, déterminer une matrice symétrique réelle inversible Q telle que ${}^tM = Q^{-1}MQ$.

60. Cas général : en s'appuyant sur le cas précédent et la propriété $(\mathscr{R})$, montrer que pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices M et ${}^tM$ sont semblables.

❄ ❄ ❄

❄ ❄

❄

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1124 – D'après documents fournis