Épreuve emlyon 2021 Voie S

Rapport de correction

1 Remarques générales

Le sujet 2021 de la voie scientifique était composé de deux problèmes indépendants, un problème d'analyse étudiant une série de fonctions et un problème d'algèbre et probabilités discrètes. Le but de l'épreuve est de vérifier chez les candidats la bonne assimilation de différentes parties du programme des deux années de classe préparatoire ECS, ainsi que de tester leurs facultés de raisonnement. Le sujet a donc pour vocation de couvrir des domaines variés du programme pour laisser l'opportunité à tout candidat, quelque soit son niveau, de pouvoir aborder au moins une partie du sujet.

Les concepteurs ont à cœur que les questions du sujet soient de difficulté progressive dans chacune des parties de chaque problème, et permettent ainsi évaluer les compétences des candidats dans les points suivants : en priorité elles vérifient la bonne connaissance du cours, ce qui permet à des candidats sérieux mais de niveau modeste une note loin d'être déshonorante ; elles évaluent ensuite les capacités des candidats à former des raisonnements rigoureux et argumentés, reposant sur des connaissances solides, sur des questions soit de type « classiques », soit plus délicates demandant alors un certain recul vis à vis des notions du programme.

Il n'était pas indispensable d'avoir traité la totalité du sujet pour obtenir une excellente note. Il est toujours préférable de mener un raisonnement rigoureux et complet sur seulement une moitié du sujet, plutôt que de donner tous les résultats (même justes) sur de nombreuses questions de manière trop rapide et sans explication réelle ; un tel raisonnement ne fournissant alors en général que peu de points au barème.

Sur la majorité des questions, le barème permet d'évaluer les compétences des candidats sur trois points :

- ⋆ en premier lieu, comprendre la problématique mise en jeu dans la question, à savoir bien lire la question demandée pour percevoir ce que l'on peut attendre d'eux à ce moment précis du sujet, problématiser correctement l'intitulé de la question et utiliser alors à bon escient celles qui précèdent ;
- ⋆ en second lieu, connaître et maîtriser les définitions et théorèmes du programme des deux années ECS, en donnant le cas échéant les hypothèses nécessaires ou suffisantes à leur application, dans le respect strict du cadre fixé par le programme officiel ;
- ⋆ une dernière part des questions se veut calculatoire, permettant aux candidats ayant du mal à mener des raisonnements abstraits, de pouvoir a minima mettre en application les techniques et formules vues en classe, par exemple dans les questions d'analyse.

L'épreuve contient enfin chaque année au moins une question d'informatique en langage Scilab correspondant au programme officiel ECS, avec un souci d'évaluer les compétences des candidats dans ce domaine sur des questions de type varié, d'un exercice à l'autre, d'une année à la suivante. Les questions d'informatique peuvent essentiellement être de trois formats : soit un programme complet ou non à achever et/ou interpréter (question **II.B.11.a.**), soit un script à écrire entièrement (questions **I.A.3.b.** et **II.B.11.b.**), soit une utilisation de sorties graphiques pour permettre de conjecturer un résultat vérifié ensuite dans le sujet (question **II.B.11.c.**).

Les questions d'informatique sont en général évaluées avec une large bienveillance et représentent une part non négligeable du barème total, nous ne pouvons donc qu'encourager les futurs candidats à aborder davantage ces questions qui sont dès lors bien mieux rémunérées que d'autres questions plus difficiles du sujet.

Il est attendu des candidats une certaine honnêteté intellectuelle dans leur copie : c'est une qualité essentielle recherchée par tous les correcteurs. Il est inutile de faire semblant que l'on arrive à un résultat de l'énoncé quand on a manifestement fait des erreurs de calcul. Il peut donc être utile de rappeler que de tels comportements dans les copies sont toujours repérés et très mal perçus par les correcteurs, d'autant plus sur les premières pages de la copie. En effet, ceci provoque dès lors un manque de confiance du correcteur vis à vis du candidat, ce qui mettra en doute ensuite la plupart des questions suivantes. Il est donc toujours préférable pour un candidat de mener ses calculs, et s'il voit une incohérence avec le sujet et qu'il ne trouve pas son erreur, a minima de signaler sur sa copie qu'il repère une disparité entre sa réponse et celle attendue, et qu'il admet le résultat pour continuer la suite ou qu'il pense repérer une erreur dans l'énoncé et continue alors dans ce sens. De même, les candidats qui se contentent d'énoncer les résultats sans les justifier n'obtiennent que très peu de points.

Enfin, les correcteurs s'attachent à toujours valoriser les copies qui sont bien présentées plutôt que celles qui relèvent d'un effort trop minimaliste pour mettre en valeur leurs réponses. Il est toujours appréciable que les candidats groupent dans leur copie leur résolution d'un des deux problèmes (par exemple en démarrant une copie nouvelle pour chaque problème). Lorsque les questions sont traitées dans le désordre, ou quand un candidat revient à un problème après en avoir traité un autre, c'est toujours plus difficile pour le correcteur aussi de suivre le raisonnement du candidat. De même, la numérotation des pages est parfois hasardeuse, ce qui rend difficile la lecture. Si n est le nombre maximal de pages rédigées par le candidat durant l'épreuve, il vaut mieux numéroter les pages $1/n$, $2/n$, $\ldots$, n/n.

Dans la mesure du possible les correcteurs apprécient que les résultats soient clairement visibles dans la copies, par exemple en les soulignant, en les encadrant (à la règle !), ou en les surlignant grâce à des couleurs. Les candidats ne faisant pas d'effort de bonne présentation ou de bonne écriture ont de grandes chances de ne pas se voir attribuer de points sur certaines questions par le correcteur, tout simplement car la copie est illisible donc les arguments ne sont pas jugés présents sur la copie, ou bien car en cas de doute sur une réponse (argument partiel ou manquant) le correcteur choisira alors toujours la version pénalisante pour dévaloriser la copie face aux autres qui font l'effort d'une bonne rédaction et d'une belle présentation. Nous ne pouvons donc qu'encourager les futurs candidats à soigner cet aspect de leur copie.

2 Éléments statistiques

Sur l'épreuve de la voie scientifique 2021 (toutes écoles inscrites confondues), 3850 candidats ont composé, et ont obtenu une moyenne générale de 11,06 sur 20, avec un écart-type de 5,70.

L'écart-type très haut témoigne d'une grande hétérogénéité dans les copies corrigées, peut-être encore plus marquée que d'autres années. Alors que certains candidats traitent pratiquement l'intégralité du sujet avec une maîtrise avancée des notions du programme, d'autres montrent des difficultés dès les toutes premières questions obtenant alors des notes très faibles, en grande partie à cause d'un travail insuffisant lors des deux années de classe préparatoire sur l'apprentissage du cours. Cette année par exemple, 52 candidats ont obtenu une note strictement inférieure à 1 avec au maximum une seule question répondue correctement.

Les copies étaient corrigées cette année avec un barème portant sur 120 points, dont 52 points pour le problème 1, chaque question ayant un nombre de points entier compris entre 1 et 5. Les notes des candidats sont alors obtenues en multipliant cette note brute sur 120 par un coefficient, et en lissant toutes les notes supérieures à 19,3, les notes étant par ailleurs harmonisées au niveau national entre les correcteurs. Toutes les hautes notes étant lissées, le nombre de candidats obtenant 20 a été donc inférieur aux années précédentes, ne conservant cette note maximale qu'aux tous meilleurs candidats (150 candidats).

Du fait de la longueur du problème 2 où des questions comportaient des calculs potentiellement longs, il n'était pas attendu des candidats qu'ils traitent l'intégralité du sujet, et un candidat sérieux et rigoureux traitant correctement et entièrement seulement une partie du sujet pouvait donc espérer avoir une note tout à fait honorable. Il ne faut donc pas hésiter pour les candidats les plus faibles à essayer de repérer les questions plus faciles du sujet (qui ne sont pas uniquement les premières de chaque problème) afin de gagner des points aisément.

À l'inverse, même si un survol rapide du sujet et un « grapillage de points » peuvent être partiellement payants, les candidats auront toujours plus de points en se focalisant sur une partie entière d'un problème. Nous rappelons une nouvelle fois que l'épreuve teste les facultés de raisonnement, et par conséquent, les questions qui relèvent de la bonne compréhension de l'enchaînement des questions sont en général valorisées, et permettent à des candidats de niveau modeste de pouvoir montrer qu'ils savent manier des raisonnements déductifs, et peuvent alors plus facilement se démarquer des candidats dont le niveau est plus faible.

3 Épreuve 2021

Le sujet était composé cette année de deux problèmes indépendants. Le premier problème utilisait des notions d'analyse et probabilités continues du programme de première année : l'étude de deux suites adjacentes convergeant vers la constante d'Euler γ, l'étude d'une série de fonctions, ainsi que l'étude d'une variable aléatoire à densité mettant en jeu les résultats vus précédemment.

Le second problème, étudiait une suite d'endomorphismes de polynômes dont le spectre était déterminé par récurrence, et enchaînait sur une expérience aléatoire, simulée en Scilab, puis modélisée par une suite de variables aléatoires dont on montre la convergence en loi vers une variable de loi hypergéométrique à l'aide de la première partie.

Le sujet, couvrant ainsi des parties diverses et variées du programme, a permis de bien classer les candidats, y compris pour les faibles notes. La présence de questions simples et classiques (par exemple dans le problème 1 les questions **5.a** ou **9**, ou dans le problème 2 les questions **2.**, **6.b**, **9.**) ont permis de récompenser les candidats ayant fourni un investissement minimal en mathématiques.

Souvent, le cours est bien su par les candidats : sur les séries, l'algèbre linéaire, l'inégalité des accroissements finis, les variables aléatoires à densité, les probabilités discrètes. Cependant, les difficultés en calcul, que ce soit sur le travail sur les inégalités, ou sur les valeurs absolues, limitent souvent certains candidats. Ces derniers ont parfois des soucis pour manipuler les expressions mathématiques, et ont du mal à percevoir les opérations algébriques manipulées. En particulier, l'absence ou la mauvaise utilisation des parenthèses dans les sommes, écrire $\sum a_n - b_n$ au lieu de $\sum(a_n - b_n)$ conduit de nombreux candidats à des erreurs de calculs, ou cela rend les calculs particulièrement difficiles à lire pour les correcteurs.

Les candidats de cette année ont montré, en 2021 comme en 2020, de très grandes différences de niveau. Les correcteurs ont pu voir d'une part plusieurs copies remplies, très bien rédigées, témoins de l'excellence de candidats ayant une grande maîtrise du programme. Mais à l'inverse, de nombreuses copies presque vides ont été corrigées, où des candidats ne maîtrisaient clairement pas du tout les objets manipulés, et montraient une très mauvaise compréhension des fondamentaux de la discipline. On ne peut qu'espérer que cette disparité si forte ne soit que passagère, due à la crise sanitaire toujours en cours, qui aura amputé de plusieurs mois la formation des candidats lors de leur première année, année fondamentale pour une compréhension fine des divers chapitres au programme. Nous espérons que ces disparités seront moins marquées les années futures.

4 Analyse en détail du Sujet

Analyse du Problème 1

1. **a.** Cette première question est en général bien faite, quelque soit la méthode choisie par le candidat, qui n'était pas imposée ici. On pouvait procéder par encadrement d'intégrale, par étude de fonctions, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, ou bien en utilisant un argument de concavité. C'est peut-être pour cette dernière méthode, que les arguments n'étaient souvent pas assez détaillés. Un simple « par concavité, on obtient » n'est bien entendu pas suffisant. De même, les justifications données étaient parfois incohérentes, par exemple dire que la courbe de ln est située en-dessous de sa tangente en 0.

   b. L'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ ne pose pas de problème particulier. Trop de candidats n'ont cependant pas détecté ensuite la présence de suites adjacentes : la monotonie est en général bien montrée, la convergence beaucoup moins. Beaucoup affirment que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ implique que les suites convergent et ont la même limite (sans avoir prouvé la monotonie).
   Dans quelques rares copies, les suites (u_n) et (v_n) ont même monotonie. Les candidats en question en sont pas gênés par la questions **3.a.** et modifient leur conclusion de la question **1.b.** pour cette question **3.a.**. Dans plusieurs copies, les candidats entament un travail d'encadrement (parfois erroné) de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, mal placé, et ne le réinvestissent pas toujours à la question suivante.

2. Les correcteurs signalent régulièrement un manque de rigueur. Souvent les candidats n'utilisent pas vraiment la convergence des suites (u_n) et (v_n). Certains divisent par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et concluent sans préciser que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$ alors que cela n'a pas été prouvé avant, et que c'est indispensable par exemple pour obtenir la limite de $\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.
   Des étudiants parviennent à prouver correctement l'équivalence en sommant les encadrements issus de la question **1.**, mais la méthode est longue et pas toujours mise en œuvre de manière rigoureuse. Ces candidats auraient dû mieux lire l'énoncé car l'intitulé de la question suggérait l'utilisation de la question précédente.
   Signalons une nouvelle fois qu'obtenir des inégalités clairement fausses du type
   $$\text{« } \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \ln(n) \text{ »} \quad \text{ou} \quad \text{« } \ln(n)+1 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \ln(n) - \frac{1}{n} \text{ »}$$
   devraient amener les candidats à réagir et signaler sur leur copie des erreurs manifestes à défaut de savoir les corriger.

3. **a.** La première inégalité est en général bien traitée, mais il est gênant qu'elle soit parfois obtenue en contradiction complète avec les résultats obtenus à la question **1.b.**. Les candidats ont du mal à manipuler les valeurs absolues, et peu ont donc abouti à la seconde inégalité demandée.

   b. Cette première question d'informatique a été peu traitée par les candidats, c'est dommage car rappelons que les questions de Scilab sont en général fort bien rémunérées. La question était difficile dans le sens où il y avait beaucoup de points à vérifier : d'une part savoir calculer u_n pour un n donné, savoir calculer v_n pour un n donné, trouver la bonne valeur de n répondant à la question, et savoir quoi renvoyer comme valeur pour la fonction. Chacune de ces différentes compétences pouvait rapporter des points dans la question.

On relève donc extrêmement peu d'algorithmes corrects avec, au delà de la difficulté de certains points de cet algorithme, des incohérences ou des erreurs trop souvent grossières.

Certains donnent exactement un programme de dichotomie pour déterminer une racine : il n'est pas attendu une restitution d'un programme rencontré dans l'année sans aucune réflexion. Beaucoup utilisent γ sans le définir pour en trouver une valeur approchée, en particulier avec une condition d'arrêt du type `while a-gamma >= 10^(-5)`.

Signalons que, comme chaque année, plusieurs candidats n'ont pas compris l'intérêt d'une fonction informatique, et continuent à utiliser des `input` et des `disp`.

4. La plupart des candidats sait correctement répondre à cette question, en comparant avec la série $\sum \dfrac{x}{k^2}$. L'erreur la plus courante est d'obtenir un terme général équivalent à $\dfrac{1}{k^2}$ est régulièrement retrouvée. Quelques rares candidats pensent que « $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x}\right) = 0$ » est suffisant pour prouver la convergence de la série, ce qui montre une mauvaise compréhension des fondamentaux sur les séries. Il est également toujours décevant de lire dans des copies que la série harmonique $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k}$ puisse converger.

5. a. Le calcul de $S(0)$ a souvent été bien fait. À l'inverse, pour $S(1)$, il est fréquent de lire une séparation de la somme en deux sommes divergentes. Pour le calcul de $S(1)$, on attend une rigueur, en passant par les sommes partielles, même si l'argument reste rapide. Un simple « $S(1) = 1$ par télescopage » ne peut être suffisant.

b. La première égalité a été peu faite correctement, les candidats effectuant des erreurs dans leurs changements d'indice. Rappelons qu'un changement d'indice ne peut être de la forme $j = 2k+1$. Quelques candidats ont opté pour une démonstration par récurrence et ont bien réussi.

La somme de Riemann n'a pas souvent été identifiée pour permettre la conclusion, ou alors à l'inverse quelques candidats de niveau faible la reconnaissent et traitent donc correctement le calcul de $S\left(\dfrac{1}{2}\right)$ sans faire le reste de la question ni d'autres questions de la partie B.

6. a. Cette question est en général bien faite, avec peu de problèmes de rédaction. Les candidats qui font apparaître des séries divergentes dans cette question, sont en général ceux qui l'avaient déjà fait en **5.a.** et qui le feront dans toutes les suivantes.

b. La méthode a été bien comprise par les candidats. Seuls certains comparent maladroitement uniquement $S(x+1)$ et $S(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

Certains ont essayé de dériver sous le signe somme. Rappelons que rien n'est exigible des candidats en ECS sur les séries de fonctions, et ils ne peuvent par conséquent pas utiliser de résultats les exploitant, même s'ils les connaissent.

c. On relève une confusion étonnante de méthodes pour les candidats qui tentent de démarrer la question en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, témoignant d'un manque de recul sur le sujet (fin de la question non lue) et sur les hypothèses de cette inégalité. Certains utilisent la formule de Taylor-Lagrange avant de sommer, cela peut en soi fonctionner, mais dans ce cas, rares sont ceux qui vérifient au préalable que les séries en jeu convergent, et on peut regretter la volonté d'appliquer des « recettes » plutôt que de réfléchir.

De nombreux candidats ont admis la première partie de la question, et seule la limite a été effectuée, montrant qu'ils avaient compris la définition de la dérivabilité.

7. **a.** Cette question, supposée non difficile, a été peu faite de manière correcte. Quand cette question est correctement faite à l'inverse, les résolutions proposées sont souvent très longues. Trop d'étudiants ne s'appliquent pas suffisamment, soit dans leur calcul (parenthèses absentes ou mal placées, considérant que le $\dfrac{1}{x+1}$ était dans le signe somme), soit dans la mise en œuvre du télescopage, où un excès de précipitation conduit à des erreurs malheureuses.

b. Cette question a été souvent bien traitée. Il est attendu une récurrence, mais on peut faire une sommation directe en reconnaissant une somme télescopique grâce à **7.a.**.

c. Cette question était assez délicate à rédiger proprement. Très peu traitent complètement la question, et finalement peu ont compris que l'existence d'une limite de $S(n)$ pour tout entier n tel que $n \to +\infty$ n'entraîne pas nécessairement l'existence d'une limite pour $S(x)$ lorsque x est une variable réelle tendant vers $+\infty$. Il fallait utiliser la croissance de S, et revenir à l'utilisation de la partie entière.

8. **a.** Cette question a été bien faite, ne posant pas de réelle difficulté. Signalons que certains candidats démarrent le raisonnement à partir de « $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \mathrm{d}x$ » pour en déduire des informations, cela les conduit à supposer que le résultat est déjà vrai et ne permet donc pas de prouver ce dit résultat.

b. La majoration a peu abouti dans les copies. Chez les rares candidats qui ont tenté sérieusement la question, on relève de trop nombreuses permutations illicites entre intégrale et séries.

c. Cette question n'a pas posé de souci particulier, les candidats ont bien reconnu le reste d'une série convergente.

9. Cette question est supposée élémentaire, et devrait être bien rédigée par tous les candidats. Elle est donc en général bien traitées, même dans les copies des candidats ayant un niveau faible. Les imprécisions relevées et sanctionnées sont : une continuité évoquée sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$, et un calcul d'intégrale écrite et calculée directement avec la borne $+\infty$ sans aucun souci de convergence.

Pour le calcul et la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$, il était toléré d'utiliser directement le résultat du cours sur les intégrales de Riemann sans refaire tout le calcul, mais il fallait alors a minima écrire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2-1}$ pour bien montrer que le résultat général des intégrales de Riemann était connu, puisque la seule valeur de l'intégrale demandée était déduite de l'intitulé de la question.

Signalons que la croissance ou la décroissance de f ne fait pas partie des hypothèses à vérifier. Il existe des densités non monotones.

10. **a.** Cette question est bien faite. Cependant, dans quelques copies, on trouve : $F_X(x) = -\dfrac{1}{x}$ pour tout réel x ou pour tout réel $x > 1$. Il serait bon de réagir : une fonction de répartition doit être positive !

b. Cette question est également bien traitée.

11. **a.** La première égalité demandée a peu souvent été prouvée de manière correcte. Beaucoup l'ont admise, ou se contentent d'affirmer sans aucun argument que $[Y \leqslant x] = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} [k \leqslant X \leqslant k+x]$. La deuxième égalité est en général bien prouvée.

b. Cette question est bien traitée.

c. L'erreur la plus fréquente a été d'oublier la continuité en 0 et en 1. Trop peu de candidats connaissent voire maîtrisent les hypothèses nécessaires portant sur une fonction de répartition pour que la variable soit à densité. Il est inutile par exemple de vérifier que F_X est croissante, tend vers 0 en $-\infty$ et tend vers 1 en $+\infty$.

Signalons également que la rédaction est souvent incomplète : le candidat sait ce qu'il faut affirmer pour F_Y, mais ne les justifient pas véritablement dans le cas présent, en faisant référence de manière précise aux résultats montrés sur S (continuité, caractère $\mathcal{C}^1$).

12. Cette question a été bien faite pour ceux qui y sont arrivés avec intégration par parties. Rappelons que le programme exige que les intégrations par parties soient réalisées sur des segments. L'existence de l'espérance est souvent soulevée mais rarement prouvée et encore moins en utilisant l'argument simple que Y est bornée.

Analyse du Problème 2

1. a. Cette toute première question a amené beaucoup trop de bluff sur la fin du calcul de $\varphi_n(X^i)$.

Des erreurs de calcul, quoique parfois discrètes, étaient systématiquement détectées par les correcteurs : les étudiants gagneraient à faire preuve d'honnêteté et à reconnaître clairement lorsqu'ils ne sont pas parvenus à retomber exactement sur le résultat attendu. C'est d'autant plus dommage que c'est la première question de problème, où cela mettra ensuite le doute sur la sincérité et l'honnêteté du candidat sur toute la suite de sa copie.

b. La linéarité n'a quasiment jamais posé de problème. En revanche, on relève beaucoup de preuves fantaisistes pour garantir que $P \in \mathbb{R}_n[X] \Rightarrow \varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. En particulier, trop de candidats constatent que par un raisonnement sur le degré on peut uniquement dire que $\deg(\varphi_n(P)) \leqslant n+1$ mais une confusion probable avec la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ les conduit à écrire que ceci entraîne bien que $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

2. a. Cette question est en général bien faite, on peut regretter les copies où le candidat refait tous les calculs (parfois longuement) sans exploiter le résultat directement donné dans l'énoncé en question **1.a.**.

b. On avait ici une question typique où les candidats appliquent des recettes apprises par cœur, sans réfléchir à tout ce que l'énoncé leur apporte, dans son énoncé.

Le but de la formulation choisie de la question était d'éviter aux candidats d'appliquer la méthode du pivot générale sur la matrice $A_2 - \lambda I$ pour chercher les valeurs propres de A_2. Pour ceux qui se lancent néanmoins dans cette méthode calculatoire, les opérations élémentaires ne sont parfois pas licites (multiplication d'une ligne par un facteur fonction de λ), et rappelons que les matrices successives obtenues ne sont pas égales, mais uniquement de même rang.

La méthode suggérée était plutôt d'obtenir uniquement l'inclusion $\left\{-\dfrac{1}{2}, 0, 1\right\} \subset \mathrm{Sp}\,(A_2)$, puis de conclure en n'oubliant pas de préciser que A_2 ne peut pas admettre d'autre valeur propre.

Beaucoup de candidats manquent clairement de recul face aux méthodes possibles. Parfois, ils perdent du temps inutilement. Les candidats qui par exemple prennent le temps de justifier que $A_2 - I_3$ n'est pas inversible dans un premier temps, puis cherchent $\mathrm{Ker}(A_2 - I_3)$ dans un deuxième temps devraient se rendre compte que la deuxième partie suffit à répondre à la question posée. Les résolutions de systèmes linéaires, longues et indigestes sont souvent fausses. Trop souvent les équations $y = 4x = 4z$ donnent que $(1, 1/4, 1)$ est une base de l'espace vectoriel associé. Une rapide vérification permettrait de corriger cette grossière erreur. Peu d'étudiants utilisent que les sous-espaces propres sont ici des droites vectorielles pour en obtenir des bases.

Rappelons comme chaque année que le terme *dimension* ne s'applique qu'à un espace vectoriel. En particulier, la dimension d'une matrice n'a pas de sens. Ici, le rang de A est différent de 3. Il semblerait donc que la notion de rang soit confondue avec la taille/l'ordre de la matrice.

Plusieurs candidats justifient que A_2 est diagonalisable en affirmant qu'elle est symétrique réelle alors qu'elle ne l'est manifestement pas !

c. L'égalité des spectres de A_2 et φ_2 est très souvent vue, mais les candidats ont tendance à oublier que les vecteurs propres de φ_2 sont des polynômes, et non des matrices.

3. Cette question de calcul a été assez bien faite en général. Seuls certains se perdent dans les calculs, et truandent pour parvenir au résultat demandé.

Rappelons que pour obtenir tous les points, il faut signaler que $(X-1)^n$ n'est pas le polynôme nul, pour montrer que la définition d'un vecteur propre est acquise dans son intégralité.

4. a. Cette question a été bien traitée.

b. Certains candidats ont visiblement compris l'idée, mais se contentent de paraphraser l'énoncé, en insérant un « donc » entre le résultat de la question. **4.a.** et ce que l'on doit démontrer, ce qui ne peut constituer une preuve.

c. Beaucoup de candidats pensent que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_n, oubliant le passage indispensable par la transposée.

5. a. Cette question était très calculatoire, et n'a donc quasiment jamais réalisée correctement. Il valait mieux pour des candidats mal à l'aise en calcul en admettre le résultat et poursuivre le problème plutôt que de démarrer et tenter des escroqueries pour parvenir au résultat. Lorsque le polynôme $(X-1)P$ n'avait pas été correctement dérivé à la première ligne du calcul, il était de toute façon impossible d'arriver au résultat final.

Beaucoup oublient de remplacer n par $n+1$ dans l'expression de φ_{n+1}.

b. Cette question a été assez bien faite dans l'ensemble, si ce n'est l'oubli de souligner qu'un vecteur propre doit être non nul.

6. a. Peu d'étudiants sont allés plus loin que l'initialisation (qui était à la portée de tous d'ailleurs).

b. Les correcteurs signalent unanimement un manque de précision regrettable dans certains arguments : il faut nécessairement corréler le nombre de valeurs propres distinctes à la dimension de l'espace vectoriel sur lequel φ_n est définie, se contenter de donner un nombre de valeurs propres distinctes n'est pas suffisant.

7. a. Quasiment aucune copie n'a abordé correctement cette question, qui demandait beaucoup d'aisance en calcul et de l'honnêteté en cas d'erreur manifeste.

b. Cette question aurait due être simple pour ceux qui avaient trouvé la bonne dimension des sous-espaces propres dans la question **6.b.** Malheureusement, on assiste à trop de conclusions directes sans rappeler que tout est lié à cette dimension.

Beaucoup ne répondent pas à la question posée : on attend le sous espace propre et non un vecteur propre. Signalons aux candidats que $\mathrm{Vect}(\Pi_n)$ et Π_n ne désignent pas le même type d'objet mathémétique, et ne peuvent donc pas être confondus.

8. a. Cette question n'est traitée que dans les bonnes copies, et dans ce cas elle est assez bien réalisée.

b. Question traitée dans quelques rares très bonnes copies.

9. Les candidats devraient tous s'appliquer à répondre correctement et rapidement à cette question. Cela a été presque toujours été fait.

10. L'erreur la plus fréquente est d'utiliser un système complet d'événement qui se limite aux événements $(Z_k = i-1), (Z_k = i)$ et $(Z_k = i+1)$.

Les explications sur les probabilités conditionnelles sont parfois trop succinctes, approximatives, se résumant à un discours incompréhensible, voire inexistantes. Par exemple, dans le calcul de la probabilité conditionnelle $P_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = i)$, certains n'évoquent que l'échange de deux boules rouges et oublient la possibilité d'échanger deux boules bleues.

11. **a.** Trop de copies ne répondent pas ou mal à cette question d'informatique, alors que les lignes présentes devaient servir d'indication forte pour compléter celles qui manquaient.

C'est néanmoins la question d'informatique la mieux réussie du sujet en comparaison des autres présentes dans le Problème 1, ou dans la suite de cette Partie B du Problème 2.

La ligne `Z=R` a très souvent été bien écrite.

b. Les algorithmes proposés sont assez souvent corrects lorsque la question est abordée (ce qui n'est pas très fréquent). Concernant la justification de la méthode, très peu présente, les termes évoqués sont la moyenne empirique, la loi faible des grands nombre ou la méthode de Monte-Carlo.

c. En général la conjecture est bien vue, même si certaines copies peinent à prendre du recul en ne donnant que les valeurs numériques correspondant aux trois cas du graphique. Dans certaines faibles copies, la limite de l'espérance dépend de k ou vaut exactement 15 ou encore 1/2.

12. **a.** Beaucoup d'erreurs sur le support de Δ_k, parfois grossières. La valeur 0 a tendance à être oubliée, sûrement avec une lecture trop hâtive de la suite du sujet.

b. Cette question a été très peu abordée. Quand elle est abordée, le système complet d'événements est bien vu, mais les valeurs des probabilités conditionnelles sont trop peu justifiées.

c. Cette question est bien réalisée par ceux qui l'ont abordée. Signalons quelques jolies utilisations du théorème de transfert pour parvenir à la première égalité.

d. Cette question était en réalité très facile, mais très peu traitée alors que tout candidat à qui il reste du temps devrait aller chercher ce genre de question d'application directe du cours, à condition de connaître la méthode pour les suites arithmético-géométriques. On peut donc espérer que les candidats ne l'ont pas beaucoup abordée par manque de temps.

Les candidats ont le réflexe du point fixe ; en revanche des erreurs apparaissent dans la suite de la procédure (translation oubliée ici ou là ; décalage d'indice dans l'expression en fonction du terme initial).

13. Question quasiment jamais été abordée, sûrement par manque de temps.

14. Question quasiment jamais été abordée, sûrement par manque de temps. Pour les rares qui ont abordé la question, ils n'ont en général pas vérifié que la limite était effectivement une loi de probabilité.