BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 296

Conception : emlyon business school

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 4 Mai 2022, de 14h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0\,;1[$ et on pose $q = 1 - p$.

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}\big([X = k]\big) = q^k p = (1-p)^k p.$$

PARTIE A :

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = X+1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

2. En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

3. Compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant en entrée le réel p, elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

```
function X = simule_X(p)
    Y = ......
    while ......
        Y = Y + 1
    end
    X = Y - 1
endfunction
```

PARTIE B :

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;
- si k est égal à zéro, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur ;
- si k est un entier supérieur ou égal à 1, alors la machine définit k variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$, toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A, et reverse au joueur $(X_1 + \cdots + X_k)$ jetons ;
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à p pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.

Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, place l'intégralité de ses jetons dans la machine, et continue de jouer encore et encore.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.

On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi $Z_0 = 1$.

On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X.

4. Compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et le réel p, elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n.

Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```
function Z = simule_Z(n,p)
    Z = 1
    for i = 1 : n
        s = 0
        for j = 1 : Z
            ......
        end
        Z = ......
    end
endfunction
```

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine ; ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \mathbf{P}\big([Z_n = 0]\big)$.

On note également R l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton ».

5. **a.** Préciser les valeurs de u_0 et de u_1.

b. Comparer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements $[Z_n = 0]$ et $[Z_{n+1} = 0]$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

Dans la suite de l'exercice, on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. Justifier : $\quad \mathbf{P}(R) = \ell$.

7. **a.** Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\quad \mathbf{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_2 = 0]\big) = (u_1)^k$.

On **admet** que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\quad \mathbf{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_{n+1} = 0]\big) = (u_n)^k$.

b. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\big([Z_1 = k]\big)\,(u_n)^k = \frac{p}{1 - q u_n}$.

8. **a.** Montrer que ℓ vérifie : $\quad (\ell - 1)(q\,\ell - p) = 0$.

b. On suppose $p \geqslant \dfrac{1}{2}$. Montrer : $\quad \mathbf{P}(R) = 1$.

c. On suppose $p < \dfrac{1}{2}$. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in \left[0\,;\dfrac{p}{q}\right]$. En déduire : $\quad \mathbf{P}(R) < 1$.

d. Expliquer pourquoi le casino préférera choisir p dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.

PARTIE C :

On suppose à présent que $p \geqslant \frac{1}{2}$.

Le casino cherche la valeur à donner à p pour que le joueur joue le plus longtemps possible dans le casino et ainsi, dépense plus d'argent dans ses consommations au bar.

On note T la variable aléatoire égale au nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque, pour la première fois, celui-ci n'a plus de jeton.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad v_n = 1 - u_n$.

9. Justifier : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \mathbf{P}\big([T \leqslant n]\big) \quad$ puis $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}\big([T = n]\big) = v_{n-1} - v_n$.

10. Montrer, pour tout N de $\mathbb{N}^*$:
$$\sum_{n=1}^{N} n\,\mathbf{P}\big([T = n]\big) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n \; - \; N\,v_N.$$

11. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.

a. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

b. En déduire que la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

12. On suppose maintenant que $p > \frac{1}{2}$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad w_n = \dfrac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$.

a. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \dfrac{q}{p}\, w_n$.

b. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}, \quad$ puis : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant v_n \leqslant \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

c. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et que l'on a : $\quad \mathbf{E}(T) \leqslant \dfrac{1}{1 - \frac{q}{p}}$.

13. Quelle(s) valeur(s) de p recommanderiez-vous au casino ?

EXERCICE 2

On rappelle que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle **trace de** M le réel noté $\mathrm{tr}(M)$ défini par :

$$\mathrm{tr}(M) = a + d.$$

Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + \mathrm{tr}(M)\, J.$$

1. **a.** Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \left|\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(M)\end{array}\right.$ est linéaire.

b. Déterminer une base du noyau de l'application tr et vérifier : $\dim\big(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})\big) = 3$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $J = \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice, notée A, de f dans la base $\mathcal{B}$.

b. Vérifier : $(A - I_4)^2 = 0$ où I_4 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

c. En déduire les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

d. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

4. On revient au cas général où J désigne une matrice non nulle quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Montrer que 1 est une valeur propre de f et préciser la dimension du sous-espace propre associé.

b. Justifier que J est un vecteur propre de f et préciser la valeur propre associée.

c. **i.** On considère dans cette sous-question le cas où $\mathrm{tr}(J) \neq 0$.
Montrer que f est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de chacun de ses sous-espaces propres.

ii. On considère dans cette sous-question le cas où $\mathrm{tr}(J) = 0$.
On suppose qu'il existe une valeur propre λ de f différente de 1 et on note M un vecteur propre associé. Montrer : $\mathrm{tr}(M) = 0$.
Aboutir à une contradiction.

iii. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(J)$ pour que f soit diagonalisable.

d. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(J)$ pour que f soit bijectif.

EXERCICE 3

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;1[$ par :

$$\forall t \in]-\infty\,;1[,\quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]-\infty\,;0[\cup]0\,;1[, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty\,;1[$.

2. **a.** Montrer : $\quad \forall t \in]-\infty\,;1[,\ \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geqslant 0.$

b. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;1[$ et déterminer f' sur ces intervalles.

c. En déduire la monotonie de f sur $]-\infty\,;1[$.

3. **a.** Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \longmapsto \ln(1-t)$.

b. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

c. Montrer enfin que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\,;1[$.

4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 1.

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant apparaître la tangente en 0.

PARTIE B :

On considère maintenant la fonction L définie sur $]-\infty\,;1[$ par :

$$\forall x \in]-\infty\,;1[,\quad L(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On rappelle que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge et on admet : $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

6. Justifier que L est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\,;1[$ et préciser L' sur $]-\infty\,;1[$.

7. **Étude de L en 1 :**

a. Montrer, à l'aide d'un changement de variable :

$$\forall (A,B) \in]0\,;1[^2,\quad \int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

b. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0\,;1[,\ \dfrac{-\ln(t)}{1-t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}.$

c. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_0^1 -t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

d. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{-t\ \ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0\,;1[$.

(On pourra commencer par calculer les limites en 0 *et en* 1*).*

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge puis montrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t \;=\; 0.$$

e. À l'aide de la question **7.b**, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge puis que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

f. En déduire que L est prolongeable par continuité en 1 en posant $L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

8. **a.** Justifier que la fonction $x \longmapsto L(x) + L(-x) - \dfrac{1}{2}\,L(x^2)$ est dérivable sur $]-1\,;0[$ et sur $]0\,;1[$ et calculer sa dérivée sur ces intervalles.

b. En déduire : $\quad \forall x \in [-1\,;1],\ \ L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}\,L(x^2).$

c. Préciser alors la valeur de $L(-1)$.

PARTIE C :

On considère enfin la fonction Φ définie sur l'ouvert $]-\infty\,;0[^2$ par :

$$\forall (x,y) \in]-\infty\,;0[^2,\ \ \Phi(x,y) = L(x) + L(y) - L(-xy).$$

On admet que la fonction Φ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\infty\,;0[^2$.

9. **a.** Calculer, pour tout (x,y) de $]-\infty\,;0[^2$, les dérivées partielles d'ordre 1 de Φ au point (x,y).

b. En déduire que Φ admet $(-1,-1)$ comme unique point critique.

10. **a.** Montrer que la matrice hessienne, notée H, de Φ au point $(-1,-1)$ est : $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

b. Déterminer les valeurs propres de H.

11. La fonction Φ présente-t-elle un extremum local sur $]-\infty\,;0[^2$?

• FIN •

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1133 – D'après documents fournis