BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mai 2022, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On désigne par a un réel et on considère une variable aléatoire X, de densité f strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$, dont la fonction de répartition est notée F.
On pose :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{F(a)} & \text{si } x\leq a\\ 0 & \text{si } x>a\end{cases}$$

1) Montrer que g est bien définie et peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire Y.

2) On note G la fonction de répartition de Y.
   a) Exprimer, pour tout réel x, $G(x)$ à l'aide de F.
   b) Vérifier que l'on a, pour tout réel x :

$$G(x)=P_{(X\leq a)}(X\leq x)$$

Dans la suite, on considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

3) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(Y_1,...,Y_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité dont on note G_n la fonction de répartition.

a) Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de G, puis à l'aide de F.

b) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.

4) On pose $Z_n = n(a - M_n)$ et on note H_n la fonction de répartition de Z_n.

a) Vérifier que l'on a :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-\left[\dfrac{F\left(a-\dfrac{x}{n}\right)}{F(a)}\right]^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{F\left(a-\dfrac{x}{n}\right)}{F(a)} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{f(a)}{F(a)}\times\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on reconnaîtra la loi.

Exercice 2

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique défini par :

$$\forall (x, y)\in (\mathbb{R}^3)^2, \ x=(x_1,x_2,x_3), \ y=(y_1,y_2,y_3), \ \langle x, y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

La norme du vecteur x est définie par $\| x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

On se propose d'étudier l'ensemble F des endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ tels qu'il existe un réel k de $[0,1[$ pour lequel on a :

$$\forall x\in \mathbb{R}^3, \ \| f(x)\| \leq k\| x\|$$

1) Déterminer l'ensemble F lorsque $k=0$.

2) Un premier exemple.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A^2 puis en déduire les deux valeurs propres possibles λ et μ de A.

b) Vérifier que A est diagonalisable et en déduire que λ et μ sont bien valeurs propres de A.

c) Justifier, sans les déterminer, que les sous-espaces propres de f sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

d) Utiliser ce résultat pour montrer que f appartient à F. On pourra écrire un vecteur x quelconque de $\mathbb{R}^3$ sous la forme $x = y + z$, avec $y\in \operatorname{Ker}(f-\lambda Id)$ et $z\in \operatorname{Ker}(f-\mu Id)$.

3) Quelques propriétés générales de l'ensemble F.

a) Vérifier que Id n'appartient pas à F.

b) Montrer que F n'est pas un espace vectoriel.

c) Montrer que F est stable par la loi de composition des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

d) Montrer que si f est un automorphisme de F, alors f^{-1} n'appartient pas à F.

4) a) Montrer que F ne contient pas de projecteurs autres que le projecteur nul.

b) F contient-il des symétries ?

5) Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer qu'en posant $k = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leq k\|x\|$.

b) En déduire que f appartient à F si, et seulement si, les valeurs propres de f appartiennent toutes à $]-1,1[$.

6) Un deuxième exemple.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 3 et donner les valeurs propres possibles de f.

b) Montrer que f appartient à F, puis donner un réel k de $[0,1[$ pour lequel on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leq k\|x\|$$

c) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette d'afficher la valeur du réel k défini à la question 5a) :

```
A=[0,-2,2;-2,-1,0;2,0,1]/6
k=---
disp(k)
```

Exercice 3

On désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.

On suppose dans ce problème que toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

On considère aussi une variable aléatoire N telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, indépendante des variables X_i, et possédant une espérance.

On pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a : $S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$. On admet que S est une variable aléatoire définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Déterminer $S(\Omega)$.

b) Montrer, sans la calculer, que S possède une espérance.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Donner la loi de S_n ainsi que son espérance.

3) Établir l'égalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(S=k)=\sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n=k)P(N=n)$$

4) Étude d'un exemple : on suppose dans cette question que N est une variable aléatoire telle que $N-1$ suit la loi de Poisson de paramètre λ.

a) Déterminer la loi de N.

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(S=k)=\dfrac{p^k\lambda^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\dfrac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$.

En déduire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(S=k)=\frac{p^k\lambda^{k-1}}{k!}(\lambda q+k)e^{-\lambda p}$$

c) Donner, grâce à $S(\Omega)$, l'expression de $P(S=0)$ en fonction de λ, p et q.

d) On se propose de calculer l'espérance de S grâce à la formule de l'espérance totale que l'on pourra utiliser sans aucune justification.
Donner la valeur de l'espérance conditionnelle $E(S\,|\,[N=n])$, puis exprimer l'espérance de S en fonction de λ et p, et vérifier que : $E(S)=E(X)E(N)$.

5) On rappelle que la commande `grand(1,1,'poi',lambda)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Compléter la fonction `Scilab` suivante pour qu'elle permette de calculer la valeur prise par S lorsque la loi de N est celle décrite à la question précédente :

```
function y=S(lambda,p)
  N=------
  y=------
endfunction
```

Problème

1) Question préliminaire
Soit f une fonction définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.

Montrer que $\ln(f(x)) \underset{0^+}{\sim} \ln x$.

Partie 1 : deux nouvelles fonctions

On définit les fonctions, appelées "sinus hyperbolique" et "cosinus hyperbolique", notées respectivement sh et ch, en posant, pour tout réel x :

$$\mathrm{sh}(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{ch}(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

2) a) Étudier la parité de la fonction sh.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction sh.

c) Déterminer un équivalent en 0 de $\mathrm{sh}(x)$.

3) a) Étudier la parité de la fonction ch.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction ch.

4) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{ch}(x))^2-(\mathrm{sh}(x))^2=1$$

Partie 2 : une troisième fonction

5) a) Montrer que l'on définit bien une fonction, appelée "tangente hyperbolique" et notée th, en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

b) Vérifier que la fonction th est impaire.

c) En s'aidant éventuellement des relations $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, déterminer les variations de la fonction th.

d) Dresser le tableau de variations, limites comprises, de la fonction th.

6) a) Trouver les constantes a et b telles que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \dfrac{a\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} + \dfrac{b\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

b) En déduire, à l'aide de la fonction th, une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction qui à $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$.

7) Montrer que $\ln\left(\mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) \underset{0^+}{\sim} \ln x$.

Partie 3 : une série convergente

Dans cette partie, on désigne par x un réel strictement positif.

8) a) Soit k un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\frac{1}{\mathrm{sh}((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)}$$

b) En déduire l'encadrement, valable pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)} \leq \int_1^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t + \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$$

9) a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est convergente.

b) Établir, pour tout réel x strictement positif, l'encadrement suivant :

$$-\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)} \leq -\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$$

c) En déduire, en utilisant certains résultats des parties précédentes, l'équivalent suivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \underset{x \to 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$$

10) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette d'afficher la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)}$ lorsque n et x sont entrés par l'utilisateur :

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=input('entrez une valeur strictement positive pour x :')
S=0
for k=1:n
S=------
end
disp(S)
```

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1134 – D'après documents fournis