Épreuve EML 2019 Voie S

Rapport de correction

1 Remarques générales

Le sujet 2019 de la voie Scientifique était composé, pour la première fois depuis 2008, d'un unique problème séparé en plusieurs parties relativement indépendantes, balayant une large partie du programme officiel ECS. Les questions se veulent de difficulté progressive dans chacune des parties, visant à évaluer les compétences des candidats dans les points suivants : en priorité elles vérifient la bonne connaissance du cours, ce qui permet à des candidats sérieux mais de niveau modeste une note loin d'être déshonorante ; elles évaluent ensuite les capacités des candidats à former des raisonnements rigoureux et argumentés, reposant sur des connaissances solides, sur des questions soit de type « classiques », soit plus délicates demandant alors un certain recul vis à vis des notions du programme.

Il n'était pas indispensable d'avoir traité la totalité du sujet pour obtenir une excellente note. Le sujet étant long, il est toujours préférable de mener un raisonnement rigoureux et complet sur seulement une moitié du sujet, plutôt que de donner tous les résultats (même justes) sur de nombreuses questions de manière trop rapide et sans explication réelle ; un tel raisonnement ne fournissant alors en général que peu de points au barème.

Sur la majorité des questions, le barème permet d'évaluer les compétences des candidats sur trois points :

- ⋆ en premier lieu, comprendre la problématique mise en jeu dans la question, à savoir bien lire la question demandée pour percevoir ce que l'on peut attendre d'eux à ce moment précis du sujet, problématiser correctement l'intitulé de la question et utiliser alors à bon escient celles qui précèdent ;
- ⋆ en second lieu, connaître et maîtriser les définitions et théorèmes du programme des deux années ECS, en donnant le cas échéant les hypothèses nécessaires ou suffisantes à leur application, dans le respect strict du cadre fixé par le programme officiel ;
- ⋆ une dernière part des questions se veut calculatoire, permettant aux candidats ayant du mal à mener des raisonnements abstraits, de pouvoir a minima mettre en application les techniques et formules vues en classe, par exemple dans les questions d'analyse.

L'épreuve contient enfin chaque année au moins une question d'informatique en langage Scilab correspondant au programme officiel ECS, avec un souci d'évaluer les compétences des candidats dans ce domaine sur des questions de type varié, d'un exercice à l'autre, d'une année à la suivante. Les questions d'informatique peuvent essentiellement être de trois formats : soit un programme complet ou non à achever et/ou interpréter (format absent cette année), soit un script à écrire entièrement (question **E.17.** cette année), soit une utilisation de sorties graphiques pour permettre de conjecturer un résultat vérifié ensuite dans le sujet (question **E.18.b.** cette année). Les questions d'informatique sont en général évaluées avec une large bienveillance et représentent une part non négligeable du barème total, nous ne pouvons donc qu'encourager les futurs candidats à aborder davantage ces questions qui sont dès lors bien mieux rémunérées que d'autres questions plus difficiles du sujet. Le sujet rappelait d'ailleurs à multiples reprises que la partie E qui contenait l'informatique était totalement indépendante des précédentes, pour encourager les candidats à l'aborder même lorsque les parties précédentes n'avaient pas donné lieu à des développements importants.

Il est attendu des candidats une certaine honnêteté intellectuelle dans leur copie. On voit encore un trop grand nombre de copies qui tentent de maquiller certains calculs erronés pour parvenir aux résultats attendus, ou prennent des libertés trop larges sur les hypothèses des théorèmes d'application du cours. Il peut donc être utile de rappeler que de tels comportements dans les copies sont en général très mal perçus par les correcteurs, notamment sur les premières pages de la copie. En effet, ceci provoque dès lors un manque de confiance du correcteur vis à vis du candidat, ce qui mettra en doute ensuite la plupart des questions suivantes. Il est donc toujours préférable pour un candidat de mener ses calculs, et s'il voit une incohérence avec le sujet et qu'il ne trouve pas son erreur, a minima de signaler sur sa copie qu'il repère une disparité entre sa réponse et celle attendue, et qu'il admet le résultat pour continuer la suite ou qu'il pense repérer une erreur dans l'énoncé et continue alors dans ce sens. De même, les candidats qui se contentent d'énoncer les résultats sans les justifier n'obtiennent que peu de points.

Enfin, les correcteurs s'attachent à toujours valoriser les copies qui sont bien présentées plutôt que celles qui relèvent d'un effort trop minimaliste pour mettre en valeur leurs réponses. La numérotation des questions abordées doit être clairement indiquée, et dans la mesure du possible les correcteurs apprécient que les résultats soient clairement visibles dans la copies, par exemple en les soulignant ou les encadrant (à la règle !), ou grâce à des couleurs. Les candidats ne faisant pas d'effort de bonne présentation ou de bonne écriture ont de grandes chances de ne pas se voir attribuer de points sur certaines questions par le correcteur, tout simplement car la copie est illisible donc les arguments ne sont pas jugés présents sur la copie, ou bien car en cas de doute sur une réponse (argument partiel ou manquant) le correcteur choisira alors toujours la version pénalisante pour dévaloriser la copie face aux autres qui font l'effort d'une bonne rédaction et d'une belle présentation. Nous ne pouvons donc qu'encourager les futurs candidats à soigner cet aspect de leur copie.

Signalons enfin que, depuis cette session 2019, la correction des copies est dématérialisée, les copies des candidats sont donc intégralement scannées avant d'être corrigées ; il est important de souligner que certains candidats qui utilisent des encres bleues très claires ou des stylos dont l'encre est baveuse ont parfois leur écriture qui devient très diluée voire illisible après le scan. Il faut donc préférer des stylos fins ayant une encre foncée, et ne conserver les autres couleurs uniquement pour la mise en page et la mise en valeur des résultats.

2 Éléments statistiques

Sur l'épreuve de la voie Scientifique 2019 (toutes écoles inscrites confondues), 3919 candidats ont composé, et ont obtenu une moyenne générale de 11,04 sur 20, avec un écart-type de 5,44.

L'écart-type très haut témoigne d'une grande hétérogénéité dans les copies corrigées. Alors que certains candidats traitent pratiquement l'intégralité du sujet avec une maîtrise avancée des notions du programme, d'autres montrent des difficultés dès les toutes premières questions obtenant alors des notes très faibles, en grande partie à cause d'un travail insuffisant lors des deux années de classe préparatoire sur l'apprentissage du cours.

Les copies étaient corrigées cette année avec un barème portant sur 120 points, chaque question ayant un nombre de points entier compris entre 1 et 5, les différentes parties étant de poids relativement égal (à part la partie E contenant l'informatique qui a alors un poids légèrement plus élevé). Les notes des candidats sont alors obtenues en multipliant cette note brute sur 120 par un coefficient et en majorant à 20, les notes étant ensuite harmonisées au niveau national entre les correcteurs. On pouvait obtenir 20 à l'épreuve 2019 en atteignant environ trois cinquièmes des points du barème. NB : Ces éléments statistiques étaient de rigueur en 2019 mais ne préjugent en aucune manière des consignes de correction pour les années à venir, le barème dépendant chaque année de la longueur du sujet et de la difficulté des questions ; de même, la proportion du sujet à traiter pour obtenir la note maximale est très variable d'une année à l'autre.

Outre les questions difficiles présentes en fin de chacune des parties, un candidat sérieux et rigoureux traitant correctement et entièrement une partie du sujet pouvait donc espérer avoir une note tout à fait honorable. Il ne faut donc pas hésiter pour les candidats les plus faibles à essayer de repérer les questions plus faciles du sujet (qui ne sont pas uniquement les premières de chaque problème) afin de gagner des points aisément.

À l'inverse, même si un survol rapide du sujet et un « grapillage de points » peuvent être partiellement payants, les candidats auront toujours plus de points en se focalisant sur une partie entière d'un problème. En effet, les questions qui relèvent de la bonne compréhension de l'enchaînement des questions sont en général valorisées, et permettent à des candidats de niveau modeste de pouvoir montrer qu'ils savent manier des raisonnements déductifs, et ils peuvent alors plus facilement se démarquer des candidats dont le niveau est plus faible.

Enfin, les questions plus délicates sont bien rémunérées sous réserve qu'elles soient extrêmement bien traitées. En analyse par exemple, les points seront surtout mis sur la vérification des hypothèses requises ; en algèbre, les points seront en priorité attribués à la bonne utilisation des raisonnements fondamentaux algébristes et à une restitution adéquate du vocabulaire attendu.

3 Épreuve 2019

Le sujet était composé cette année d'un unique problème dont les fils conducteurs sont plutôt « classiques », dans le sens où les candidats sont supposés avoir pour la plupart déjà travaillé durant leurs deux années de classe préparatoire le même type de raisonnements présents dans le sujet, en traitant des problèmes proches parmi les annales ou en s'entraînant sur des exercices d'applications du cours mettant en jeu des techniques et méthodes similaires. L'équipe de conception s'attache chaque année à ce que le sujet réponde à ce cahier des charges, de manière à ce que le sujet soit conforme au programme, progressif, de manière à valoriser les candidats ayant effectué un travail régulier et sérieux en CPGE.

L'indépendance des 5 parties permet d'aborder différents points du programme : algèbre linéaire, suites et séries, intégration sur un segment ou sur un intervalle, algèbre bilinéaire, variables aléatoires discrètes et à densité.

La partie A avait pour but d'étudier un endomorphisme de polynômes en dimension finie. Les premières questions sont volontairement abordables par la plupart des candidats, pour permettre une vraie entrée en matière progressive en terme de difficulté. Le but de cette partie est de vérifier la bonne assimilation des éléments fondamentaux de l'algèbre linéaire du programme de 1ère et 2ème années.

La partie B étudiait un cas particulier de l'application introduite dans la partie A, mais cette fois étaient évaluées les connaissances des candidats en analyse élémentaire et en intégration. Cette partie s'avère déjà plus discriminante car, même si les candidats n'étaient pas souvent bloqués et avaient souvent l'idée des méthodes à mettre en œuvre, on attendait ici des démonstrations précises et rigoureuses, ce qui a donc permis de classer les candidats.

La partie C avait pour but d'étudier une application des résultats établis précédemment. Les compétences évaluées étaient donc en premier lieu de pouvoir lire le sujet dans sa globalité et de percevoir les liens entre les résultats de la partie B et les questions de la partie C. Par ailleurs, la fin de la partie abordait une étude de variables aléatoires à densité, ce qui a permis même aux candidats les plus faibles d'obtenir des points.

La partie D était sans doute la plus difficile du problème, demandant rigueur et autonomie en algèbre bilinéaire et dans la manipulation des intégrales généralisées.

La partie E enfin, totalement indépendante du reste du sujet, testait les compétences des candidats en Scilab, et sur l'analyse discrète : manipulation de suites, de séries, avec une rapide application aux variables aléatoires discrètes.

Malgré la longueur apparente du sujet, les candidats ont en général abordé un peu de chacune des parties, et de nombreuses copies ont clairement abordé toutes les questions du sujet. L'articulation du problème était guidée et progressive, la faible quantité de questions bloquantes a donc permis aux candidats sérieux de bien avancer dans le sujet, tout en leur permettant de mettre en valeur leurs connaissances dans diverses parties du programme. Les correcteurs ont estimé qu'il s'agissait d'un excellent sujet, de difficulté modérée et de longueur bien adaptée au niveau des candidats. Ne comportant pas d'erreur d'énoncé et conforme au cadre strict défini par le programme et son esprit, il a atteint ses objectifs en terme de progressivité, ce qui a permis de classer les candidats de manière tout à fait satisfaisante, comme le montre l'écart-type proche de 6. Les questions proches du cours ont permis aux copies modestes de mettre en valeur leur travail d'apprentissage, les questions plus fines ou de synthèse ont permis aux meilleurs candidats de se démarquer et d'obtenir des notes excellentes.

L'écart de niveau entre les candidats reste cependant important. Les connaissances de base de classes préparatoires ne sont pas toujours acquises, les raisonnements ne sont pas toujours assez clairement construits, et les techniques les plus simples de calcul ne sont pas maîtrisées chez certains candidats, heureusement peu nombreux. À l'inverse, d'excellents candidats montrent une technicité et une maîtrise avancée du programme, parvenant avec aisance à résoudre la quasi-totalité du sujet.

4 Analyse en détail du Sujet

Analyse de la partie A : Étude d'endomorphismes de polynômes

1. Cette question facile est traitée correctement dans la grande majorité des copies. En tant que toute première question du sujet, on attendait ici une vraie preuve de la linéarité de Ψ_a, une seule mention « par linéarité de la dérivation » ne pouvant suffire ; mais les candidats le font spontanément, ce qui montre qu'ils ont bien en tête de soigner les toutes premières questions du sujet.
Certains candidats maladroits oublient de montrer le caractère « endo »ou « linéaire ». D'autres ne vérifient le fait que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Ψ_a qu'en raisonnant avec des polynômes de degré n, ou bien en énonçant des égalités sur les degrés (si $\deg(P) = k$, alors $\deg(P') = k - 1\dots$), alors qu'il vaut mieux raisonner uniquement avec des inégalités de degrés.

2. Certains candidats se contentent à tort de donner les deux premières colonnes et la dernière colonne, alors qu'on attend clairement ici une expression générale des colonnes de A.
Un calcul clair de $\Psi_a(X^k)$ doit au moins alors être effectué à côté de façon apparente, ou bien la $(k+1)$-ième colonne de la matrice précisément écrite.
De même, la forme générale de la matrice (ici triangulaire supérieure) doit être clairement mise en évidence et visible sur la copie. Les erreurs sur la sur-diagonale sont tout autant sanctionnées.
Globalement, les candidats peuvent perdre des points inutilement sur ce genre de questions, tout simplement car ils manquent de soin. Écrire une matrice de taille $n + 1$, au même titre que tracer une représentation graphique d'une fonction, doit être aussi clair que possible afin que toutes ses formes particulières sont clairement identifiées.
La principale erreur possible était de classer les vecteurs de la base canonique dans le mauvais sens et obtenir une matrice triangulaire inférieure.

3. **a.** Cette question, pourtant classique, a donné lieu à de nombreux raisonnements erronés. Trop de candidats pensent que toute matrice triangulaire est diagonalisable. Pour d'autres, une matrice triangulaire dont les valeurs propres sont non nulles est diagonalisable.

Pour la précision des valeurs propres, on attend explicitement que le candidat mentionne que la matrice est « triangulaire » pour pouvoir donner le spectre sans autre justification. Pour la condition suffisante de diagonalisabilité, on attendait ici une réponse du type « le nombre de valeurs propres est égal à la taille de A », même si la taille de la matrice A était fausse dans l'esprit du candidat (n à la place de $n+1$), mais une justification claire était requise pour obtenir tous les points.

b. Assez fréquemment, les candidats considèrent qu'une matrice diagonalisable est inversible.

c. Cette question de calcul élémentaire a été bien traitée.

d. Étrangement, la formulation de la question a souvent été mal comprise par les candidats. Autant le lien entre la question **3.c.** et les vecteurs/valeurs propres a bien été effectué, autant on a pu voir dans de nombreuses copies qu'alors Q_k était l'espace propre associé à la valeur propre $k+2$, ou alors que $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ était une « base de chacun des sous-espaces propres », ce qui témoignait d'un manque de compréhension des candidats sur la signification de la question posée.

Pour obtenir tous les points, il fallait préciser la non-nullité de Q_k (rarement rappelée ici dans les copies), et préciser la dimension des sous-espaces propres.

4. **a.** Cette question de calcul élémentaire a été bien traitée.

b. Cette question demandait un peu de rigueur de la part des candidats, les invitant à traiter deux cas distincts pour $\Phi_a(\Psi_a(P))(x)$ selon si $x \neq a$ ou si $x = a$. Les candidats ont cependant souvent bien fait le lien avec la question **4.a.**.

On relève également beaucoup d'erreurs sur les objets manipulés : confusion entre P et $P(a)$, entre $\Psi_a(P(a))$ et $[\Psi_a(P)](a)$, etc.

c. Cette question était sans aucun doute la plus délicate de cette partie, et demandait des candidats une certaine autonomie et une bonne maîtrise du cours d'algèbre linéaire pour répondre de manière efficace et correcte à la question.

Beaucoup considèrent que l'égalité $\Phi_a(\Psi_a(P)) = P$ implique que Φ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Le plus rapide était bien entendu de faire un lien avec Ψ_a^{-1}, dont l'existence avait été établie en question **3.b.** et de reconnaître que d'après la question précédente on avait nécessairement $\Phi_a = \Psi_a^{-1}$, et donc que Φ_a était bien un endomorphisme.

Les candidats qui ont voulu montrer directement que Φ_a était linéaire puis bijective, ont soit perdu beaucoup de temps, soit raisonné de manière assez imprécise ou trop rapide. Le peu d'hypothèses faites au départ sur l'application Φ_a n'a pas été remarqué.

d. Signalons encore une fois que nous attendons des candidats qu'ils répondent aux questions du sujet en utilisant exclusivement les résultats au programme. Les copies annonçant « l'inverse d'une endomorphisme diagonalisable est diagonalisble » sans aucune justification sont sanctionnés. On attendait ici un raisonnement rapide, soit en étudiant les valeurs propres (comme le suggérait la question) à l'aide des polynômes Q_k, soit en étudiant l'inverse de la matrice trouvée à la question **2.**.

Environ une moitié des candidats traitent cette question. Certains considèrent qu'on a toujours $Sp(\Phi_a) = Sp(\Phi_a^{-1})$.

Analyse de la partie B : Étude d'une fonction définie par une intégrale

5. **a.** Comme à chaque début de nouvelle partie, beaucoup de candidats abordent la question ; les correcteurs sont alors en attente d'une rédaction précise et rigoureuse.
Les candidats précisant par exemple que f doit être C^1 (ce qui n'était même pas le cas) pour que h le soit sont lourdement pénalisés. De même, certains candidats donnent comme argument que $t \mapsto tf(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$, ou de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, ou bien continue sur $[0, x]$, ce qui n'est jamais la condition attendue. Parfois même on peut lire que « f est continue donc dérivable ».
On relève de nombreuses confusions entre la fonction f et le réel $f(x)$.
D'autres copies considèrent correctement une primitive par exemple A de $t \mapsto tf(t)$ mais écrivent ensuite que $h'(x) = A'(x) - A'(0)$, ce qui était faux également ici.
Finalement, cette question a été souvent peu réussie de manière parfaite tant les maladresses étaient nombreuses dans les copies.

b. Ici encore, on attendait une rédaction précise et rigoureuse dans les copies.
Certains candidats ont supposé que f était monotone ; ces candidats n'obtenaient alors aucun point sur la question même si d'autres raisonnements étaient corrects, tant la méthode était inadaptée.
Les candidats ont su rappeler le théorème énonçant qu'une fonction continue sur un segment était bornée et atteignait ses bornes. On attendait ensuite que les candidats se soucient quelque part de l'ordre des bornes d'intégration pour finaliser leur réponse. Certains ne donnent aucune étape de leur calcul sur les inégalités.

c. Ici encore, les candidats trop rapides n'obtiennent pas tous les points par manque de justifications. On attendait un raisonnement précis par encadrement pour justifier que $\lim_{x \to 0} \alpha_x = \lim_{x \to 0} \beta_x = 0$, et trop peu de candidats pensent à mentionner la continuité de f en 0 pour conclure.

d. Le raisonnement étant ici très différent de ce qui précède (l'ordre des bornes de l'intégrale inversant de nombreuses inégalités dans le calcul effectué auparavant), on ne pouvait donc pas se contenter d'une réponse de type « De même ». Un raisonnement rapide mais précis était attendu, en prenant effectivement grand soin de l'ordre des inégalités

6. Cette question de synthèse a été bien traitée par les candidats ayant su dériver correctement la fonction h à la question **5.a.**
On relève néanmoins des confusions entre la continuité en 0 et le prolongement par continuité en 0.

7. **a.** Le raisonnement a été bien mené par la plupart des candidats ayant abordé la question. On attendait explicitement le changement de variable utilisé (sans forcément de justification, le changement étant affine ici). Ici, on pouvait se permettre d'indiquer que le raisonnement se faisait de même lorsque f était impaire (même si en toute rigueur il aurait fallu alors étudier le cas où $x = 0$ dans ce cas).
Malheureusement, certains candidats malhonnêtes multiplient les signes $-$, espérant sûrement noyer le correcteur, méthode qui est bien entendu à bannir définitivement.

b. Ici cependant, on attendait un argument clair et précis prenant en compte l'ordre des bornes de l'intégrale, et il était donc impératif de séparer les cas où $x > 0$ ou $x < 0$. Trop ne font pas cette distinction et ne détaillent pas leur raisonnement, préférant un texte explicatif.

8. **a.** Les candidats abordant la question ont en général bien su mener le raisonnement.

b. La question a été généralement peu abordée, ou bien de manière trop imprécise. Certains distinguent les fonctions paires et impaires et considèrent alors avoir traité tous les cas.

Analyse de la partie C : Une application en probabilité

9. Dans cette question, seules les inégalités de droite (pour comparer F et G) apportaient des points, la compétence de « positivité de l'intégrale »ayant par ailleurs été déjà évaluée dans la partie B. Le cas $x > 0$ a souvent été bien traité, les candidats ayant spontanément pensé à utiliser la croissance de F. Le deuxième cas a été plus difficile à mettre en œuvre compte tenu des changements de sens dans les inégalités.

10. Il s'agissait ici de faire appel aux résultats de la partie B. Le sujet invitait d'ailleurs les candidats à le faire au début de la partie C. De nombreux candidats ont recommencé les raisonnements à zéro pour dériver G alors même qu'ils avaient déjà mené tous les calculs dans la question **6.**

11. Cette question plus théorique a souvent été abordée par les candidats, mais peu parviennent à aboutir. De manière générale, comme ici c'était la première question du sujet où l'on devait montrer qu'une fonction était une densité, il y a aussi des points de méthode attribués à ceux qui connaissent la (bonne) définition et amorcent correctement leur réponse. Il fallait dans l'idéal utiliser avec bon escient les résultats de la partie B pour répondre de manière rapide et efficace.
Signalons enfin que la caractérisation d'une fonction en tant que fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité n'est pas explicitement au programme, mais les correcteurs se sont montrés indulgents lorsque les candidats l'appliquaient, tant la question peut être classique.

12. a. Cette question élémentaire a souvent été bien traitée par les candidats. Mentionnons encore une fois que pour une telle question, de niveau facile, traitée par la majorité des copies, une rigueur de rédaction est exigée, tant elle est systématique dans la plupart des copies.
Les quelques candidats qui confondent l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}\mathrm{d}x$ avec une intégrale partielle $\displaystyle\int_0^{A} 2xe^{-x^2}\mathrm{d}x$ se retrouvent alors toujours lourdement pénalisés.

b. Les réponses ici ont été souvent décevantes, alors que la question est classique et avait sûrement été travaillée par les candidats durant l'année. Les étudiants font des changements de variable et/ou des intégrations par parties et souvent, ils affirment que la valeur de l'intégrale obtenue est exactement celle qu'il faut pour que le résultat demandé par l'énoncé soit trouvé . . . et peu importe si les fautes de calcul préalables provoquent une légère entorse à la réalité mathématique.
On attendait dans cette question un appel clair au moment d'ordre 2 d'une variable de loi normale bien choisie (soit la loi normale centrée de variance 1/2, soit la loi normale centrée réduite après un changement de variable affine). Les candidats utilisent à tort la notion magique « intégrale de Gauss » pour désigner toute intégrale comportant un terme en e^{-*^2}. Le résultat étant donné dans le sujet, on attendait donc une justification claire et précise de la valeur obtenue, avec un appel explicite à une loi normale usuelle et en utilisant la parité de la densité utilisée.

Nombreux sont les candidats ayant voulu procéder par intégration par parties, et qui ont ensuite voulu utiliser la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$, qui est hors programme. Ces candidats n'ont alors pas obtenu la totalité des points de la question.
Certains candidats montrent l'existence de l'espérance au préalable à l'aide d'un critère de négligeabilité ou comparaison ; c'était peut-être inutile mais cela pouvait rapporter des points lorsque cela était bien fait.
Malheureusement, on lisait alors parfois une comparaison avec l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$, qui elle

est divergente.

c. Cette question plus technique demandait plus d'aisance en calcul de la part des candidats. Seuls les bons candidats ont su déterminer h_2, et peu ont su étudier correctement l'intégrale généralisée pour l'espérance de X_2 car peu ont remarqué qu'il y avait deux bornes à étudier.

Analyse de la partie D : Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

13. a. Cette inégalité devrait être connue, mais elle est en général mal démontrée, et cela a souvent donné lieu à de nombreuses réponses malhonnêtes, notamment pour la gestion de la valeur absolue, qui apparaissait miraculeusement dans certaines copies. Rappelons que toute tentative non dissimulée d'escroquerie reste sanctionnée d'une part dans la question, mais que cela génère également une perte de confiance du correcteur envers le candidat sur toutes les questions qui suivent, sur lesquelles aucune indulgence ne sera tolérée.

b. Cette question est très classique, il est assez sûr que tous les candidats l'ont rencontrée plusieurs fois dans leur formation ; elle est cependant très mal traitée. La continuité des fonctions à intégrer est presque toujours omise. La rédaction du critère de comparaison pour la convergence des intégrales généralisées est en général maladroite pour de nombreux candidats. Dans un nombre trop grand de copies, on voit une intégration directement sur $[0, +\infty[$ de l'inégalité $|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x))$, puis une discussion de comparaison d'intégrales.
Rappelons encore une fois si nécessaire que le critère de comparaison s'applique aux **fonctions** positives, et non aux intégrales de fonctions positives.

14. Étrangement, cette question a été peu abordée correctement (à l'inverse de la question suivante), alors que c'était une question élémentaire accessible à tous les candidats.
Les principales erreurs rencontrées venaient soit d'un mauvais développement de $(\lambda f(x)+g(x))^2$, soit de confusions mathématiques (entre l'ensemble vide et l'ensemble $\{0\}$ par exemple). Il est dommage que, comme à la question **13.b.**, de nombreux candidats manipulent les intégrales généralisées sans aucune précaution de convergence préalable.

15. La définition du produit scalaire est acquise dans la majorité des copies, le chapitre étant étudié en deuxième année on peut supposer que les connaissances sont plus récentes.
Ici on attendait un soin très particulier au caractère « défini positif », en particulier un appel explicite au fait que la fonction $x \mapsto f^2(x)$ soit positive et continue. On voit souvent apparaître le fait que la fonction f admette une infinité de racines, signe que les candidats apprennent parfois des raisonnements classiques par cœur (ici sur les polynômes) sans en comprendre les véritables subtilités.

16. a. Il s'agissait ici de faire le lien avec les résultats de la partie B, les candidats ont en général bien su le mener pour la première limite, mais n'ont pas nécessairement vu comment en déduire le deuxième calcul de limite.

b. La méthode d'intégration par parties étant indiquée dans la question, on attend alors une mise en œuvre précise et en adéquation avec le programme. En particulier, on attendait explicitement à ce que les candidats reviennent à un segment pour appliquer la formule d'intégration par parties (et souvent on lit sans complexe que $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est de classe C^1 sur $[0, x]$) et une justification de la limite en 0 était attendue (si non de la convergence de la nouvelle intégrale généralisée qui apparaissait, au moins la validité du passage à la limite dans l'égalité).

c. On souhaitait dans cette question redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cadre des intégrales. La question était guidée de manière à ce que les candidats puissent retrouver les idées de la démonstration de leur cours. Cependant, sûrement en raison d'une lecture trop rapide, beaucoup de candidats ont cru qu'il fallait appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz plutôt que la démontrer. Si certains souhaitaient l'utiliser directement, il aurait alors été indispensable de donner le produit scalaire utilisé et l'espace vectoriel considéré.

d. Cette question a été mal traitée, en raison d'un manque de rigueur des candidats l'abordant, la résolution consistant souvent essentiellement en une série d'affirmations.

e. Là encore, les candidats allaient un peu vite, et ont assimilé la norme à l'intégrale partielle de la question précédente. Peu de candidats ont su déceler les vraies subtilités de la question. Pour montrer que $\Phi(f)$ appartenait à E_2, il était nécessaire ici d'utiliser la croissance et la majoration de la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_0^X (\Phi(f)(x))^2 \mathrm{d}x$, puis effectuer un passage à la limite.
Dans une majorité des copies ayant abordé la question, les candidats assimilaient la norme aux intégrales partielles calculées à la question précédentes, et ne faisaient pas la distinction avec les intégrales généralisées en jeu ici.

f. Cette question a été peu abordée, sûrement par manque de temps. Les copies ayant amorcé le raisonnement ont bien su vérifier que la limite demandée était finie, mais n'ont pas forcément réussi à achever la démarche par l'absurde.

g. Cette égalité nécessitait de faire un passage à la limite dans l'égalité du **16.b.**, on a vu apparaître les mêmes confusions qu'en question **16.e.** entre intégrales généralisées et partielles.

Analyse de la partie E : Étude d'une suite

17. Cette première question d'informatique du sujet a été abordée par une grosse moitié des candidats, ce qui est encore peu malgré les en-têtes du problème qui les invitaient à aborder cette partie E, totalement indépendante des précédentes.
Ici, il était question d'écrire une fonction Scilab d'en-tête donné, pour calculer le terme général de la suite (v_n).
Aucun autre exemple de fonction Scilab n'étant présent dans le sujet, les correcteurs se montrent alors toujours un peu plus indulgents sur la précision de la syntaxe du programme. Les principaux points attendus sont :
— la bonne structure de la fonction : que le candidat comprenne que la fonction ne doit pas commencer par un `input` si l'entier `n` a été donné au préalable en entrée de la fonction, et que la fonction s'achève bien par une ligne du type `v = ....`, idéalement la présence d'un affichage de type `disp` est inutile ici ;
— le calcul de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k$, soit par une boucle `for` initialisée correctement, soit par multiplication membre à membre de deux vecteurs lignes puis appel à la fonction `sum` ;
— la gestion du facteur $1/(n(n+1))$ dans le calcul de la fonction ;
— un appel correct de la fonction `suite_u` dont l'écriture est imposée par le sujet.
Nous ne pouvons que nous féliciter du nombre important de copies ayant abordé cette question cette année, signe que les préparateurs encouragent volontiers leurs étudiants à traiter l'informatique dans les sujets, tant cela peut rapporter de points.

18. **a.** Cette question a été bien traitée par la quasi totalité des candidats.

b. Étonemment, cette question d'interprétation de sorties graphiques a été plutôt mal traitée, les candidats ne prenant pas de recul réel vis à vis de ce qu'ils peuvent visualiser sur le sujet.
Déjà, on peut souligner qu'il est inutile de paraphraser le sujet : dans plusieurs copies, on voit une énumération de constatations pour chacune des suites : « pour cette suite-là, la suite est décroissante, converge vers 0.5 ; pour telle autre, ... », alors que le but est justement de conjecturer à l'aide de ces exemples une règle générale.
Enfin, un grand nombre de candidats a conjecturé que la limite de la suite (v_n) était inférieure à celle de la suite (u_n), alors même que le sujet demandait explicitement de conjecturer la valeur de cette limite en fonction de celle de (u_n).

c. La première inégalité a été plutôt bien traitée par les candidats tentant une amorce ; d'autres se retrouvant bloqués s'ils amorçaient une récurrence, ou allant trop vite en affirmant que $\dfrac{1}{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
La deuxième inégalité a été peu traitée et le résultat a été admis par la plupart.

d. Cette question a été bien faite en général.

e. Par manque de temps sans doute, cette question a été peu abordée par les candidats.

19. **a.** Question rarement traitée, mais pour les copies l'abordant, beaucoup ont calculé directement $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n$ à l'aide d'une permutation de sommes, et s'en sont bien sortis.

b. Là encore, comme pour la question **16.d.**, il était attendu des candidats qu'ils étudient la croissance et la majoration de la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n\right)_{N\geqslant 1}$, mais ce n'est clairement pas un réflexe naturel pour les candidats, qui ébauchent souvent un critère de majoration.
Encore une fois, signalons que le critère de majoration s'applique aux termes généraux des séries, et non aux sommes partielles elles-mêmes.

c. Question peu traitée dans l'ensemble.

d. Les candidats voient le lien entre les questions **19.a.** et **19.c.** mais très peu mentionnent explicitement un passage à la limite, ce qui était pourtant ce qu'attendaient les correcteurs.

20. **a.** Cette question a été mal comprise par les candidats, qui l'ont donc plutôt délaissée.

b. Cette toute dernière question cependant a été abordée par la quasi-totalité des candidats, signe encourageant du fait qu'ils lisent l'intégralité du sujet. Pour obtenir tous les points pour l'équivalent demandé, il fallait entre autres mentionner que $\mathbb{E}(Y)$ était non nulle ici. La plupart des candidats ont cependant pu ensuite achever la démonstration par le critère d'équivalence pour obtenir la non-existence de l'espérance de Z.