BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 296

Conception : em**lyon business school**

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril 2019, de 14h00 à 18 h00.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

PARTIE A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.

On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty\,;0[$ et continues sur $[0\,;+\infty[$.

1. **a.** Justifier : $\forall t \in [0\,;+\infty[,\quad 0 \leqslant F_U(t)\, f_V(t) \leqslant f_V(t)$.

b. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{P}\big([U \leqslant V]\big).$$

2. En déduire : $\displaystyle \mathbf{P}\big([U > V]\big) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t)\, \mathrm{d}t.$

3. **Exemple :** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

a. Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

b. En déduire : $\displaystyle \mathbf{P}\big([U > V]\big) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$

PARTIE B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.

On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $\quad M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.

a. Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $\mathbf{P}\big([M_n > t]\big)$.

b. En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
Reconnaître la loi de M_n et préciser son(ses) paramètre(s).

5. **a.** Montrer : $\displaystyle \mathbf{P}\big([N = 1]\big) = \mathbf{P}\big([T_1 \leqslant T_0]\big) = \frac{1}{2}.$

b. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad [N > n] = \big[M_n > T_0\big]$.
En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbf{P}\big([N > n]\big)$ en fonction de n.

c. Montrer alors : $\displaystyle \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\quad \mathbf{P}\big([N = n]\big) = \frac{1}{n(n+1)}.$

d. En déduire la valeur de $\mathbf{P}\big([N = 0]\big)$.

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsque
il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que : $B = P^{-1}\,A\,P$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

PARTIE A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
Justifier que A est inversible et diagonalisable.

2. Déterminer une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que : $A = P\,D\,P^{-1}$.
Expliciter la matrice D^{-1}.

3. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.

4. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

PARTIE B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x, -z, y+2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$.

5. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.

6. **a.** Vérifier que 1 est valeur propre de f et que (u_1, u_2) est une base du sous-espace propre associé.

b. Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.

c. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

7. **a.** Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.

b. Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.

8. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

PARTIE C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?

10. a. Calculer N^3 puis $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.

b. En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

11. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

a. Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.

b. Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = \big(g \circ g(u), g(u), u\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.

d. Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

12. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall t \in]0\,;+\infty[, \quad f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $[2\,;+\infty[$.

On note $g : [2\,;+\infty[\to [1\,;+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1\,;+\infty[$.

3. **a.** Dresser le tableau de variations de g.

b. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2\,;+\infty[$.

c. Soit $y \in [2\,;+\infty[$.
En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0\,;+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

PARTIE B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe C^2 sur l'ouvert $U =]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad h(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y).$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout (x,y) de U.

5. Soit $(x,y) \in U$. Montrer :

$$(x,y) \text{ est un point critique de } h \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}.$$

6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a,b).

7. **a.** Vérifier : $\quad \forall (x,y) \in U, \quad h(x,y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\dfrac{x}{y}\right).$

b. En déduire que h admet en (a,b) un minimum global sur U.

PARTIE C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2\,u_n} = \frac{1}{n}\,f(n\,u_n).$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
1 function u = suite(n)
2     u = 1
3     for k = ..................
4         u = ..................
5     end
6 endfunction
```

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Montrer : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

b. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} v_n$.

c. Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. a. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\qquad \dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b. Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

c. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\qquad u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.

Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2\,;3]$.

d. Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}.$$

e. En déduire une fonction Scilab qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

• FIN •