

**Conception : ESSEC**

OPTION SCIENTIFIQUE

**MATHÉMATIQUES**

Mercredi 2 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

**Notations et objectifs :**

Lorsque  $r$  est un nombre réel strictement positif, on note :

$$A(r) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que : } \forall k \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum n^k |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

$$\text{et } B(r) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \right\}.$$

Et à toute suite  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $B(r)$ , on associe, sous réserve d'existence, la fonction

$$f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des ensembles  $A(r)$  et  $B(r)$ .

Dans la seconde, on étudie les propriétés de régularité des fonctions  $f_a$ .

Dans la troisième partie, on obtient, dans le cas où  $r > 1$ , sous certaines hypothèses, une formule de réciprocity donnant la suite  $a$  en fonction de la suite  $(f_a^{(n)}(1))_{n \in \mathbb{N}}$ .

Enfin, dans la dernière partie, on utilise les résultats obtenus pour l'étude de variables aléatoires discrètes.

## Partie I – Premières propriétés et premiers exemples.

- 1- Soit  $r$  un nombre réel strictement positif et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $A(r)$ , montrer que, pour tout nombre réel  $x$  de  $[-r, r]$  et pour tout entier naturel  $k$ , la série  $\sum n^k |a_n| |x|^n$  converge. En déduire que, pour tout réel  $r'$  tel que  $r \leq r'$ , on a :  $A(r') \subset A(r)$ .
- 2- Vérifier également que :  $0 < r \leq r' \Rightarrow B(r') \subset B(r)$  et  $A(r) \subset B(r)$
- 3- Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif  $r$ ,  $A(r)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
- 4- Exemples :
  - a- On souhaite montrer que, pour tout  $r$  réel strictement positif, la suite  $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $A(r)$ . Pour cela, on pose pour tout entier naturel  $k$  :  $u_n(k) = \frac{n^{k+2} r^n}{n!}$ . En considérant le quotient  $\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)}$ , montrer que la suite  $(u_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. Conclure alors :  $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in A(r)$ .
  - b- Pour  $\lambda$  réel strictement positif, on note  $\beta(\lambda)$  la suite  $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Déterminer les réels strictement positifs  $r$  pour lesquels la suite  $\beta(\lambda)$  appartient à  $B(r)$ . Déterminer ensuite les réels  $r$  strictement positifs pour lesquels la suite  $\beta(\lambda)$  appartient à  $A(r)$ .
- 5- Soit  $\rho$  un réel strictement positif et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $B(\rho)$ . Montrer que, pour tout réel  $r$  de  $]0, \rho[$ , la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dans  $A(r)$ .  
(On pourra penser à écrire :  $n^k |a_n| r^n = |a_n| \rho^n n^k \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ .)

## Partie II – Régularité de la fonction $f_a$

Dans cette partie  $R$  désigne un réel strictement positif et  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $B(R)$ .

- 6- Vérifier que  $f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est définie sur  $] -R, R[$  (on pourra utiliser la question 5).
- 7- Continuité de  $f_a$  :

- a- Soit  $r$  un réel de  $]0, R[$ ,  $x$  dans  $[-r, r]$  et  $h$  un réel tel que :  $x+h \in [-r, r]$ , montrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $\left| (x+h)^n - x^n \right| \leq nr^{n-1} |h|$ .
- b- Justifier alors soigneusement que  $\left| f_a(x+h) - f_a(x) \right| \leq \frac{1}{r} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| r^n \right) |h|$ .
- c- Montrer alors que  $f_a$  est continue sur  $[-r, r]$  puis sur  $] -R, R[$ .

8- Caractère  $C^1$  de  $f_a$  :

On considère ici un réel  $r$  de  $]0, R[$  et  $x$  dans  $[-r, r]$ . Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ et, sous réserve d'existence : } g_a : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

- a- Soit  $\rho$  dans  $]r, R[$ . Justifier que la suite  $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $B(\rho)$ , en déduire que  $g_a$  est définie et continue sur  $] -R, R[$ .
- b- Vérifier que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $S_n(x) = a_0 + \int_0^x S'_n(t) dt$ .
- c- Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $\left| \int_0^x (g_a(t) - S'_n(t)) dt \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k$ .
- d- En déduire que :  $f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t) dt$ .
- e- Montrer alors que  $f_a$  est de classe  $C^1$  sur  $] -R, R[$  et que :  $f'_a = g_a$ .

9- Caractère  $C^\infty$  de  $f_a$  :

- a- Soit  $r$  de  $]0, R[$ . Montrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $A(r)$  si et seulement si, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , la série  $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k}$  converge.
- b- Montrer que  $f_a$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -R, R[$  et que, pour tout  $x$  de  $] -R, R[$  et tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  :  $f_a^{(k)}(x) = k! \left( \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \right)$ .
- c- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , exprimer  $a_n$  en fonction de  $f_a^{(n)}(0)$ .

10- Exemples :

- a- On pose  $\alpha = \left( \frac{1}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Donner une expression de  $f_\alpha(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , calculer  $f_\alpha^{(k)}(1)$ .

- b- Soit  $\lambda$  un réel strictement positif,  $\beta$  la suite  $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $f_\beta : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n x^n$ . Donner une expression de  $f_\beta(x)$  pour tout  $x$  de  $\left] -\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} \right[$ . En déduire que, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  et tout  $x$  de  $\left] -\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} \right[$ , la série  $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k}$  converge et :  $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = \frac{1}{(1-\lambda x)^{k+1}}$

### Partie III – Une formule de réciprocity.

Dans cette partie,  $R$  désigne un réel strictement supérieur à 1 et  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $B(R)$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on note  $b_n = \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!}$  et on fait l'hypothèse (H) qu'il existe un réel  $\rho$  strictement supérieur à 1 tel que la suite  $(b_n \rho^n)_{n \geq 0}$  converge vers 0.

11- Expression de  $a_0$  :

a- Montrer que :  $\forall N \in \mathbb{N}, f_a(0) = \sum_{p=0}^N (-1)^p b_p + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt$ .

b- Démontrer que :  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt = 0$ .

c- En déduire que la série  $\sum_{p \geq 0} (-1)^p b_p$  converge et que :  $a_0 = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p b_p$ .

12- Généralisation : On considère ici un entier naturel  $s$  fixé.

a- Montrer que :  $\forall N \in \mathbb{N}, f_a^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^N (-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t) dt$ .

b- Vérifier que :  $\forall N \in \mathbb{N}, \left| \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t) dt \right| \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!} \rho^{N+s+1} \frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \frac{1}{\rho^{N+s+1}}$ .

c- Déterminer  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t) dt$ .

d- Montrer alors que la série  $\sum_{p \geq 0} (-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s}$  converge et :  $a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n$ .

13- Cas particulier : on suppose dans cette question que  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de réels positifs pour laquelle il existe un entier naturel  $d$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq d+1 \Rightarrow a_n = 0$ .

a- Que peut-on dire de la fonction  $f_a$  ?

b- Montrer que la condition (H) est réalisée.

c- En déduire que, pour tout  $s$  de  $\llbracket 0, d \rrbracket$ ,  $a_s = \sum_{n=s}^d (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n$ .

#### Partie IV – Applications aux variables aléatoires discrètes.

Dans cette partie, les variables aléatoires seront discrètes, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Pour une telle variable aléatoire  $X$ , on pourra utiliser, sans les rappeler, les notations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = P(X = n), a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } G_X : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ autrement dit : } G_X = f_a.$$

14- Premiers résultats :

a- Justifier que la suite  $a$  appartient à  $B(1)$ .

b- En déduire qu'il existe un réel  $R$  au moins égal à 1 tel que  $G_X$  soit définie et de classe  $C^\infty$  sur  $] -R, R[$ .

15- Premier exemple :

a- On suppose tout d'abord que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre 1, déterminer la fonction  $G_X$ , vérifier qu'elle est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $s$  de  $\mathbb{N}$ , calculer  $G_X^{(s)}(1)$ .

b- On suppose maintenant que  $X$  est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  telle que :  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et vérifiant :  $G_X = f_a$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $s$  de  $\mathbb{N}$  :  $f_a^{(s)}(1) = 1$ . Justifier que l'hypothèse (H) du III est réalisée et déterminer  $a_n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ . Quelle est la loi de  $X$  ?

16- Deuxième exemple : On considère ici un réel  $p$  dans  $]0, 1[$  et on note  $q = 1 - p$ .

a- On suppose que  $X+1$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$ . Déterminer la suite  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  puis la fonction  $G_X$  ; vérifier que  $G_X$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$ . Enfin, pour tout  $s$  de  $\mathbb{N}$ , calculer  $G_X^{(s)}(1)$ .

b- On suppose maintenant que :  $p > \frac{1}{2}$ . Vérifier que :  $\frac{q}{p} < 1$ .

On considère  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  telle que :  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ . On suppose de plus que :  $G_X = f_a$  est définie et de

classe  $C^\infty$  sur  $\left] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right[$ , et pour tout  $s$  de  $\mathbb{N}$  :  $\frac{f_a^{(s)}(1)}{s!} = \left(\frac{q}{p}\right)^s$ . Justifier que l'hypothèse

(H) du III est réalisée et déterminer  $a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Quelle est la loi de  $X+1$  ?

17- Cas où  $X$  est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs :

On suppose dans cette question que  $X(\Omega)$  est inclus dans  $\llbracket 0, d \rrbracket$  où  $d$  est un entier de  $\mathbb{N}^*$ .

On note  $Pol_d$  le sous-espace des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $d$ . Pour  $s$  de  $\llbracket 0, d \rrbracket$ , on note  $e_s$  la fonction  $x \mapsto x^s$  et on rappelle que  $(e_s)_{s \in \llbracket 0, d \rrbracket}$  est une base de  $Pol_d$ .

On définit les fonctions de  $Pol_d$  :

$$H_0 : x \mapsto 1 \text{ et pour tout } s \text{ de } \llbracket 1, d \rrbracket, H_s : x \mapsto \frac{x(x-1)\dots(x-s+1)}{s!} = \frac{1}{s!} \prod_{k=0}^{s-1} (x-k).$$

a- Montrer que la famille  $(H_s)_{s \in \llbracket 0, d \rrbracket}$  est une base de  $Pol_d$ .

On note  $\Delta$  défini sur  $Pol_d$  par :  $\forall P \in Pol_d, \Delta(P) : x \mapsto P(x+1) - P(x)$ .

b- Vérifier que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $Pol_d$ .

c- Montrer que :  $\Delta(H_0) = 0$  et encore :  $\forall s \in \llbracket 1, d \rrbracket, \Delta(H_s) = H_{s-1}$  et  $H_s(0) = 0$ .

d- Montrer que :  $\forall P \in Pol_d, \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(P))(0)] H_s(x)$ .

e- En déduire que, pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, d \rrbracket$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$n^k = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(e_k))(0)] H_s(n).$$

f- Montrer alors que, pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, d \rrbracket$ , l'espérance de  $X^k$  est :

$$E(X^k) = \sum_{s=0}^d [(\Delta^s(e_k))(0)] b_s \text{ où } b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!}.$$

g- Exemple : on suppose ici que :  $d=2, E(X)=1$  et  $E(X^2) = \frac{3}{2}$ . Déterminer  $b_0, b_1$  et  $b_2$ , puis  $a_0, a_1$  et  $a_2$ . Reconnaître la loi de  $X$ .